

Mathematik > Vektorrechnung > Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen

Einleitung

Im dreidimensionalen Vektorraum lassen sich an Lagebeziehungen für zwei Ebenen ausmachen:

- die zwei Ebenen sind identisch
- die zwei Ebenen sind zueinander parallel und nicht identisch
- die zwei Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden.

Die Ebenen sind dabei in der Koordinatenform gegeben. Durch Aneinandersetzen der Ebenengleichungen ergeben sich lineare Gleichungssysteme, die wie folgt mit dem sog. Gauß-Algorithmus berechnet werden können:

Zur Lösung komplexer linearer Gleichungssysteme verwendet man den Gaußschen Algorithmus, d.h. folgende Vorgehensweise: 1) Das lineare Gleichungssystem aus Gleichungen und Unbekannten wird in Matrixdarstellung umgeschrieben; eine Gleichung entspricht eine Zeile, einer Unbekannten einer Spalte in der Matrix, die rechte (Zahlen-) Seite des Gleichungssystems bildet die letzte Spalte der Matrix; die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten kann auch verschieden sein. 2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist. Es entsteht dadurch das Endtableau des Algorithmus, das auf die Art der Lösungen und die Lösungen des linearen Gleichungssystems hinweist gemäß den folgenden Fällen:

Fall I – eindeutige Lösung: 3/I) Ist im Endtableau des Gaußschen Algorithmus die Dreiecksgestalt (Stufenform) gegeben, so gilt für die Variable z der letzten Spalte mit dem dazugehörigen Matrixelement $a \neq 0$ und dem Element b der rechten Seite: $az = b \Leftrightarrow z = b/a$. / Für die Variable y der vorletzten Spalte mit dem dazugehörigen Matrixelement $c \neq 0$, dem Matrixelement d und dem Element e der rechten Seite gilt: $cy + dz = e \Leftrightarrow cy = e - db/a \Leftrightarrow y = e/c - db/(ac)$ / usw., bis die Variable der ersten Matrixspalte errechnet ist. 4/I) Die Lösungsmenge besteht in diesem Fall – wegen der Eindeutigkeit der Lösung – aus einem Zahlentupel, also: $L = \{(l|m|...|t)\}$ mit reellen Zahlen l, m, ... t.

Fall II – keine Lösung: 3/II) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ein Element $f \neq 0$ ist. 4/II) Wir erhalten also die Gleichung: $0 = f \neq 0$ und damit einen Widerspruch. Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

Fall III – mehrdeutige Lösung: 3/III) Das Endtableau enthält im Bereich der linken Seite eine Nullzeile, während die damit korrespondierende rechte Seite ebenfalls ein Element $= 0$ enthält. 4/III) Wir erhalten eine mehrdeutige Lösung, indem wir die Variable z, dessen Diagonalelement $= 0$ ist, gleich einem reellen Parameter r setzen. Die Lösungsmenge ist dann vom Typ $L = \{(l(r)|m(r)|...|t(r)) \mid r \in \mathbf{R}\}$ mit linearen, von r abhängigen Funktionen $l(r) = l_1 r + l_2$, $m(r) = m_1 r + m_2$, ..., $t(r) = t_1 r + t_2$. Bei mehreren Nullzeilen des Endtableaus sind auch entsprechend viele Variablen gleich Parametern r, s, ... zu setzen, die Komponenten der Lösungsmenge sind Linearkombinationen der Parameter r, s, ...

Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen

Für zwei Ebenen E, F in Koordinatenform mit: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und: F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem (zwei Gleichungen; drei Unbekannte x_1, x_2, x_3) mit dem Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{array} \right) & \text{bzw.} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \end{array} \quad (\text{bei Erweiterung um eine Nullzeile auf drei Gleichungen}),$$

das mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in Dreiecksgestalt umgeformt wird. Die auftretenden Arten der Endtableaus haben dann eine der folgenden Gestalten:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} * & (*) & (*) & | & (*) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

=> 2., 3. Zeile als Nullzeilen => Ebenen sind identisch: $E = F$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} * & (*) & (*) & | & (*) \\ 0 & 0 & 0 & | & * \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

=> 2. Zeile mit Widerspruch, 3. Zeile als Nullzeile => Ebenen parallel, nicht identisch: $E \parallel F, E \neq F$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} * & (*) & (*) & | & (*) \\ 0 & * & (*) & | & (*) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

=> 3. Zeile als Nullzeile => Ebenen schneiden sich mit Schnittgerade $g = E \cap F$

(*: reelle Zahl $\neq 0$, (*): reelle Zahl $\neq 0$ oder $= 0$).

Beispiele

a) Ebenen E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$, F: $-4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -10$

=> Nebeneinandersetzen => lineares Gleichungssystem unter Einbeziehung einer Nullzeile =>

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $1*(2) + 2*(1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

=> 2., 3. Zeile als Nullzeilen => Ebenen sind identisch: $E = F$.

b) Ebenen E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$, F: $4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 8$

=> Nebeneinandersetzen => lineares Gleichungssystem unter Einbeziehung einer Nullzeile =>

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $1*(2) - 2*(1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

=> 2. Zeile mit Widerspruch, 3. Zeile als Nullzeile => Ebenen parallel, nicht identisch: $E \parallel F, E \neq F$.

c) Ebenen E: $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12$, F: $x_2 + 3x_3 = 12$

=> Nebeneinandersetzen => lineares Gleichungssystem unter Einbeziehung einer Nullzeile =>

Anfangstableau als Endtableau:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 2 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

=> Dreiecksgestalt, 3. Zeile als Nullzeile => Ebenen schneiden sich in der Schnittgeraden $g = E \cap F$

mit der Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Schnittgerade zwischen zwei Ebenen: Lineares Gleichungssystem

In Wiederholung des vorhergehenden Abschnitts über die Schnittgerade zweier Ebenen setzen wir Letztere als Ebenen in Koordinatenform zwei Ebenen E, F in Koordinatenform mit: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und: F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ voraus. Sind die Normalenvektoren

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{n}_F = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$ nicht zueinander parallel, d.h. gilt: $\vec{n}_E \neq k \cdot \vec{n}_F$ für jedes reelle k, so

schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgeraden $g = E \cap F$. Die Schnittgerade lässt sich in diesem Fall über ein lineares Gleichungssystem (mit oder ohne Gauß-Algorithmus) bestimmen.

Beispiele: a) Die Ebenen E: $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8$ und F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$ in Koordinatenform schneiden sich in einer Schnittgeraden g. Mit dem Gauß-Algorithmus wird das lineare Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten gelöst:

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} + 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 8 \\ + 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}$$

Anfangstableau:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & R.S. \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

1. Schritt: $2 \cdot (2) - 1 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

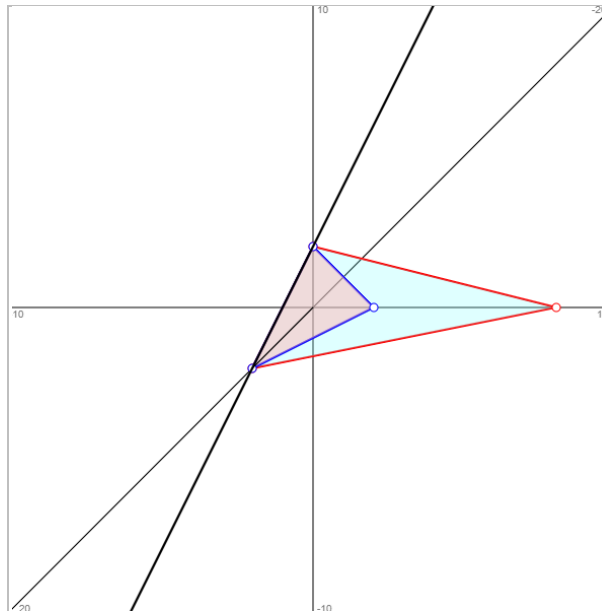
$$\begin{array}{l} + 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 8 \\ \quad + 3x_2 = 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 4 - 2t. \end{array}$$

Mit $x_1 = 4 - 2t, x_2 = 0, x_3 = t$ ergibt sich mit reellem Parameter t als Gleichung der Schnittgeraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



b) Die Ebenen E: $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8$ und F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$ ergeben ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} + 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 &= 8 \\ + 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem ist unterbestimmt, so dass sich der Parameter $x_3 = t$ einführen lässt. Das Gleichungssystem lautet dann:

$$\begin{aligned} + 2x_1 + 1x_2 + 4t &= 8 \\ + 1x_1 + 2x_2 + 2t &= 4 \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu:

$$\begin{aligned} + 2x_1 + 1x_2 &= 8-4t \\ + 1x_1 + 2x_2 &= 4-2t \end{aligned}$$

Multiplikation der 1. Gleichung mit der Zahl 2 und Subtraktion der beiden Gleichungen voneinander ergeben (nach dem Additions-/Subtraktionsverfahren):

$$\begin{aligned} + 2x_1 + 1x_2 &= 8-4t & | \cdot 2 \\ + 1x_1 + 2x_2 &= 4-2t \\ \hline + 4x_1 + 2x_2 &= 16-8t & \text{(I)} \\ + 1x_1 + 2x_2 &= 4-2t & \text{(II)} \\ \hline + 3x_1 &= 12-6t & \text{(I)-(II)} \end{aligned}$$

Das Teilen der zuletzt aufgeführten Gleichung durch die Zahl 3 führt auf: $x_1 = 4 - 2t$. Einsetzen von x_1 z.B. in die Gleichung (II) ergibt weiter: $4-2t + 2x_2 = 4-2t \Leftrightarrow 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$, womit $x_1 = 4 - 2t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$ als Lösungen des linearen Gleichungssystems bestimmt sind. Mit $x_1 = 4 - 2t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$ ergibt sich mit reellem Parameter t als Gleichung der Schnittgeraden:

$$\vec{g}: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schnittgerade zwischen zwei Ebenen: Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) von zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ wird definiert

als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist mithin ein Vektor, der senkrecht auf den beiden das Kreuzprodukt bildenden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

Für zwei nichtparallele, also sich schneidende Ebenen E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ in Koordinatenform ergibt sich vermöge der Normalenvektoren der Ebenen:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{n}_F = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{n}_E \neq k \cdot \vec{n}_F \text{ für alle reellen } k$$

der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Schnittgeraden $g = E \cap F$ mit $g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ als:

$$\vec{u} = \vec{n}_E \times \vec{n}_F,$$

d.h.: der Richtungsvektor der Schnittgeraden steht senkrecht auf den Normalenvektoren der zwei Ebenen. Der Stützvektor $\vec{a}$ der Schnittgeraden ist eine Lösung des linearen 2x3-Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= d \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 &= h \end{aligned}$$

, wobei durch Nullsetzen von x_1 oder x_2 oder x_3 ein lineares 2x2-Gleichungssystem von der Form:

$$\begin{aligned} bx_2 + cx_3 &= d \\ fx_2 + gx_3 &= h \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} ax_1 + cx_3 &= d \\ ex_1 + gx_3 &= h \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= d \\ ex_1 + fx_2 &= h \end{aligned}$$

entsteht, mit einer eindeutigen Lösung für die übrigen Variablen (als Komponenten des Stützvektors).

Beweis: Dem aus dem linearen 2x3-Gleichungssystem ermittelten Stützvektor $\vec{a}$ der Schnittgeraden g entspricht ein Punkt A auf den Ebenen E und F. So lassen sich die beiden Ebenen in Normalenform darstellen als: E: $\vec{n}_E \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ und F: $\vec{n}_F \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Auch die Schnittgerade

$g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ liegt insgesamt in/auf den Ebenen, so dass folgt:

$$g \subset E \rightarrow \vec{n}_E \cdot ((\vec{a} + t \vec{u}) - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_E \cdot (t \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_E \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}_E$$

$$g \subset F \rightarrow \vec{n}_F \cdot ((\vec{a} + t \vec{u}) - \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_F \cdot (t \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_F \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}_F.$$

Der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Schnittgeraden steht in der Tat senkrecht auf den Normalenvektoren der zwei Ebenen. Er kann also mit dem Kreuzprodukt der zwei Normalenvektoren identifiziert wer-

den, so dass $\vec{u} = \vec{n}_E \times \vec{n}_F$ gilt. Damit ist alles gezeigt.

Beispiel: Die Ebenen E: $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8$ und F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$ in Koordinatenform schneiden sich in einer Schnittgeraden g. An Normalenvektoren der beiden Ebenen lassen sich aus den

Koordinatenformen ablesen: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist das

Kreuzprodukt der Normalenvektoren bzw. ein Vielfaches davon:

$$\vec{n}_E \times \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinsichtlich des linearen 2x3-Gleichungssystems

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 2x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 8$$

$$+ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

wird $x_3 = 0$ gesetzt, so dass ein 2x2-Gleichungssystem entsteht:

$$+ 2x_1 + 1x_2 = 8$$

$$+ 1x_1 + 2x_2 = 4$$

Gemäß dem Additions-/Subtraktionsverfahren folgt:

$$+ 2x_1 + 1x_2 = 8 \quad | \cdot 2$$

$$+ 1x_1 + 2x_2 = 4$$

$$+ 4x_1 + 2x_2 = 16 \quad (I)$$

$$+ 1x_1 + 2x_2 = 4 \quad (II)$$

$$+ 3x_1 = 12 \quad (I)-(II)$$

und damit: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$. Aus: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ergibt sich als Stützvektor der Schnittgeraden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Schnittgerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}$ der Ebenen E und F lautet damit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schluss

Die vorangehenden Abschnitte haben die Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen konsequent auf die Lösbarkeit und Lösung von linearen Gleichungssystemen zurückgeführt. Soll nur die Art der Lagebeziehung – Identität, Parallelität bei Nichtidentität oder Schnitt zweier Ebenen – festgestellt werden, so empfiehlt sich auch die Betrachtung der Normalenvektoren der zwei Ebenen. Für zwei vorgegebene Ebenen E, F in Koordinatenform mit:

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ und: F: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = h$ sind $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$ deren Normalen-

vektoren. Der Vergleich der zwei Normalenvektoren miteinander führt dann auf die jeweilige Lagebeziehung der zwei Ebenen. D.h.:

a), b) $\vec{n}_E = k \cdot \vec{n}_F$ für ein bestimmtes reelles $k \Rightarrow$ Ebenen sind identisch: $E = F$ oder: Ebenen sind parallel, nicht identisch: $E \parallel F, E \neq F$

c) $\vec{n}_E \neq k \cdot \vec{n}_F$ für alle reellen $k \Rightarrow$ Ebenen schneiden sich mit Schnittgerade $g = E \cap F$.

Im Fall a), b) folgt noch hinsichtlich der Identität oder Nichtidentität der zwei Ebenen: Setzt man einen Spurpunkt $S_{[1,2,3]}(s_1|s_2|s_3)$ der Ebene F (mit $s_2=s_3=0$ oder $s_1=s_3=0$ oder $s_1=s_2=0$) in die Ebene E ein (Punktprobe) ergibt sich bei Identität der Ebenen (a)) die allgemein gültige Aussage $d = d$, bei Nichtidentität (b)) die falsche Aussage: $as_1+bs_2+cs_3 \neq d$.

Im Fall c) wird nur die Existenz einer Schnittgeraden g nachgewiesen. Über die Parametrisierung der Geraden wird nichts ausgesagt.

Beispiele

a) Ebenen E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$, F: $-4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -10$

$\Rightarrow$ Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n}_F = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit: $\vec{n}_E = -0,5 \cdot \vec{n}_F \Rightarrow$ Ebenen identisch oder parallel

Spurpunkt $S_2(0|-5|0)$ der Ebene F $\Rightarrow$ Punktprobe durch Einsetzen von $S_2(0|-5|0)$ in Ebene E $\Rightarrow 2 \cdot 0 - (-5) + 3 \cdot 0 = 5$ als wahre Aussage $\Rightarrow$ Ebenen sind identisch: $E = F$.

b) Ebenen E: $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$, F: $4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 8$

$\Rightarrow$ Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit: $\vec{n}_E = 0,5 \cdot \vec{n}_F \Rightarrow$ Ebenen identisch oder parallel

Spurpunkt $S_2(0|-4|0)$ der Ebene F $\Rightarrow$ Punktprobe durch Einsetzen von $S_2(0|-4|0)$ in Ebene E $\Rightarrow 2 \cdot 0 - (-4) + 3 \cdot 0 = 4 \neq 5$ als falsche Aussage $\Rightarrow$ Ebenen sind parallel, nicht identisch: $E \parallel F, E \neq F$.

c) Ebenen E: $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12$, F: $x_2 + 3x_3 = 12$

$\Rightarrow$ Normalenvektoren $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit: $\vec{n}_E \neq k \cdot \vec{n}_F$ für alle reellen k

$\Rightarrow$ Ebenen schneiden sich mit Schnittgerade $g = E \cap F$.