**Michael Buhlmann**

# Mathematik > Vektorrechnung > Projektionen

## Einleitung

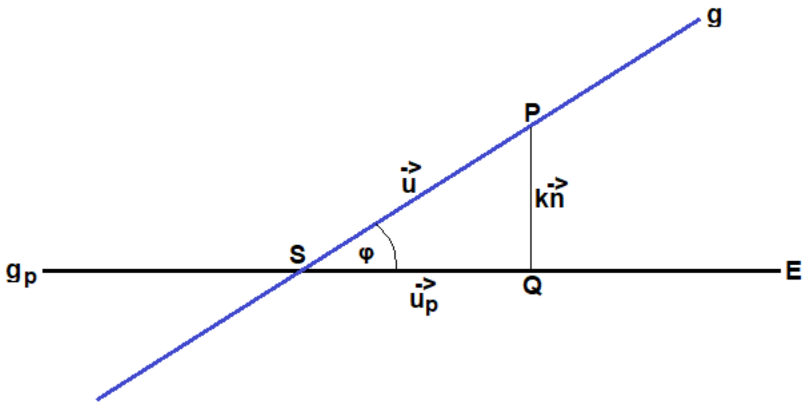
Orthogonale Projektionen im dreidimensionalen Vektorraum stellen Abbildungen dar, die einen Vektor, einen Punkt oder eine Gerade senkrecht auf einen Vektor, eine Gerade oder eine Ebene projizieren; die Dimension (Punkt: 0, Gerade: 1, Ebene: 2) des Projizierten darf die Dimension dessen, worauf projiziert wird, nicht überschreiten. Die Projektion von Punkten auf Geraden und Ebenen führt dabei zu den Lotfußpunkten, so dass der Vektor Punkt-Lotfußpunkt senkrecht auf den Geraden und Ebenen steht. Wird ein Vektor $\vec{u}$ auf einen Vektor $\vec{v}$ projiziert, so ergibt sich als Projektionsformel (der senkrechten Projektion):

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2} \cdot \vec{v} ,$$

eine Formel, die gleich hergeleitet wird. Im Folgenden wird die Projektion einer Geraden auf eine Ebene betrachtet.

## Geradenprojektion auf Ebene: herkömmliche Herangehensweise

Die Gerade g habe die Form g: $\vec{x} = \vec{OS} + t\,\vec{u}$ mit Stützvektor $\vec{OS}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit schneidet die Gerade g die Ebene E: $\vec{n}\left(\vec{x} - \vec{OS}\right) = 0$ mit Normalenvektor $\vec{n}$ im Punkt S. (Sollten Gerade und Ebene parallel liegen, so ist die zur Geraden g parallele Geradenprojektion trivialerweise dadurch bestimmt, dass zum Stützvektor $\vec{OS}$ der Lotfußpunkt als Stützvektor der Geradenprojektion zu ermitteln ist.)




Die Projektion der Geraden g auf die Ebene E ist dann von der Form: $g_p$: $\vec{x} = \vec{OS} + t\,\vec{u}_p$ mit dem noch zu bestimmenden Richtungsvektor $\vec{u}_p$. Im rechtwinkligen Dreieck SPQ ist φ der Schnittwinkel zwischen Gerade g und Ebene E, so dass zusammen mit der trigonometrischen Beziehung des Sinus als Gegenkathete geteilt durch die Hypotenuse

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|} = \frac{k\left|\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

erfüllt ist. Umstellen nach k führt auf:

$$k = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|^2}.$$

Im Dreieck SPQ folgt mit

$$\vec{OP} = \vec{OS} + \vec{u}$$

$$\vec{OQ} = \vec{OP} - k\,\vec{n} = \vec{OS} + \vec{u} - k\,\vec{n} = \vec{OS} + \vec{u} - \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}$$

schließlich:

$$\vec{u}_p = \vec{SQ} = \vec{OQ} - \vec{OS} = \vec{OS} + \vec{u} - \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n} - \vec{OS} = \vec{u} - \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n},$$

so dass sich mithin $\vec{u}_p$ errechnet als:

$$\vec{u}_p = \vec{u} - \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|^2}\vec{n}.$$

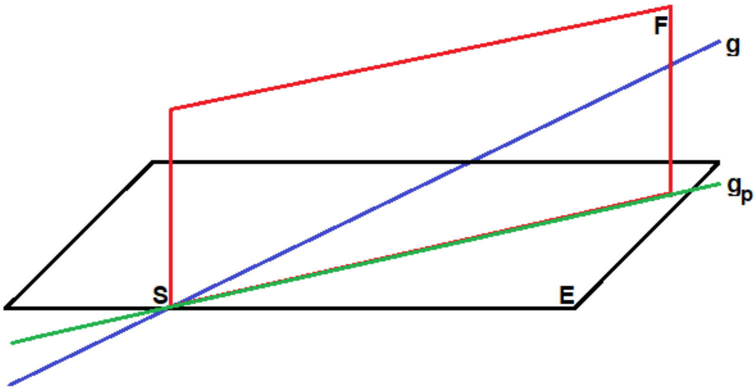
<u>Geradenprojektion auf Ebene: mit dem Kreuzprodukt</u>

Wir bemerken zuerst, dass der Richtungsvektor $\vec{u}$ einer Schnittgeraden g zweier Ebenen E und F senkrecht auf den Normalenvektoren $\vec{n}_E$, $\vec{n}_F$ der Ebenen steht. Seien dazu die Schnittgerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$, die Ebenen E: $\vec{n}_E\,\vec{x} = d_E$ und F: $\vec{n}_F\,\vec{x} = d_F$. Einsetzen von g in E und F ergibt bei g $\subset$ E, F und $\vec{n}_E\,\vec{a} = d_E$, $\vec{n}_F\,\vec{a} = d_F$:

$$\vec{n}_E\left(\vec{a} + t\,\vec{u}\right) = d_E \;\Rightarrow\; \vec{n}_E\,\vec{a} + t\,\vec{n}_E\,\vec{u} = d_E \;\Rightarrow\; d_E + t\,\vec{n}_E\,\vec{u} = d_E \;\Rightarrow\; t\,\vec{n}_E\,\vec{u} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_E\,\vec{u} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} \perp \vec{n}_E$$

$$\vec{n}_F\left(\vec{a} + t\,\vec{u}\right) = d_F \;\Rightarrow\; \vec{n}_F\,\vec{a} + t\,\vec{n}_F\,\vec{u} = d_F \;\Rightarrow\; d_F + t\,\vec{n}_F\,\vec{u} = d_F \;\Rightarrow\; t\,\vec{n}_F\,\vec{u} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_F\,\vec{u} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} \perp \vec{n}_F$$

und damit das Gewünschte. Der Richtungsvektor einer Schnittgeraden lässt sich damit als Vielfaches des Kreuzproduktes von Normalenvektoren der sich schneidenden Ebenen darstellen.




Die Gerade g habe nun wieder die Form g: $\vec{x} = \vec{OS} + t\,\vec{u}$ mit Stützvektor $\vec{OS}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit schneidet die Gerade g die Ebene E: $\vec{n}\left(\vec{x} - \vec{OS}\right) = 0$ mit Normalenvektor $\vec{n}$ im Punkt S. Wegen der orthogonalen Projektion der Geraden g auf die Ebene E bilden wir zunächst eine (Hilfs-) Ebene F, die senkrecht zur Ebene E steht und die Gerade g enthält. Die Parameterform der Ebene F hat folglich das Aussehen:

F: $\vec{x} = \vec{OS} + t\,\vec{u} + r\,\vec{n}$,

so dass sich als ein Normalenvektor der Ebene F der Vektor $\vec{u} \times \vec{n}$ ergibt. Die Schnittgerade $g_p$: $\vec{x} = \vec{OS} + t\,\vec{u}_p$ der beiden zueinander senkrechten Ebenen E und F ist nach Konstruktion von F die Projektion der Geraden g auf die Ebene E. Nach dem eben über Schnittgeraden Gesagten lässt sich der Richtungsvektor der Geradenprojektion dann darstellen als:

$\vec{u}_p = -\left(\vec{u} \times \vec{n}\right) \times \vec{n}$.

<u>Beispiele</u>:

a) Die Ursprungsgerade g: $\vec{x} = t\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ wird auf die $x_1$-$x_2$-Ebene E: $x_3 = 0$ projiziert, die orthogonal projizierte Gerade hat das Aussehen: $g_p$: $\vec{x} = t\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$. Dies gilt wegen: $\vec{u}_p = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|^2} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$. Projektionen von Geraden auf Grundebenen des $x_1$-$x_2$-$x_3$-Koordinatensystems führen dazu, dass in der Gleichung der Geradenprojektion beim Stütz- und beim Richtungsvektor jeweils eine Vektorkomponente zu Null wird.

b) Die Gerade g: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E: $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$ im Punkt S(0|4|0). Die Gleichung der Geradenprojektion $g_p$ auf E lautet: $g_p$: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\11\\-7\end{pmatrix}$ auf Grund von:

$$\overset{->}{u} \times \overset{->}{n} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overset{->}{u}_p = -\left(\overset{->}{u} \times \overset{->}{n}\right) \times \overset{->}{n} = -\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2\\-11\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\11\\-7\end{pmatrix}.$$

Zum Vergleich. Gemäß der herkömmlichen Vorgehensweise erhalten wir gemäß der Projektionsformel als Richtungsvektor der Projektionsgeraden

$$\overset{->}{u}_p = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|^2} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{7}{6} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{6}\\ \frac{11}{6}\\ -\frac{7}{6}\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2\\11\\-7\end{pmatrix}.$$

Die beiden Richtungsvektoren $\overset{->}{u}_p$ sind also Vielfache voneinander, die Geradenprojektion $g_p$ ist dieselbe.