Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > Spiegelungen mit Punkten

Einleitung

Im dreidimensionalen Vektorraum können Spiegelungen von Punkten, Geraden und Ebenen an Spiegelpunkten, -geraden und -ebenen durchgeführt werden. Kommen Punkte ins Spiel, so liegen einerseits Punktspiegelungen von Punkten, Geraden und Ebenen an Spiegelpunkten F vor (Punktspiegelung als Drehung um 180 Grad); wird ein Punkt P an einer Spiegelgeraden oder -ebenen gespiegelt (Spiegelung eines Punktes), so liegt letztlich ebenfalls eine Punktspiegelung vor, und zwar am auf der Spiegelgerade oder -ebene liegenden Lotfußpunkt F. In jedem Fall gilt die Spiegelformel der Spiegelung eines Punktes P an dem Spiegelpunkt F mit gespiegeltem Punkt P‘:

$$\overrightarrow{OP}' = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} \quad (*),$$

Letzteres auf Grund der Umformung: $\overrightarrow{OP}' = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$. Mit der Beziehung:

$$\overrightarrow{OP}' = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} \quad (**)$$

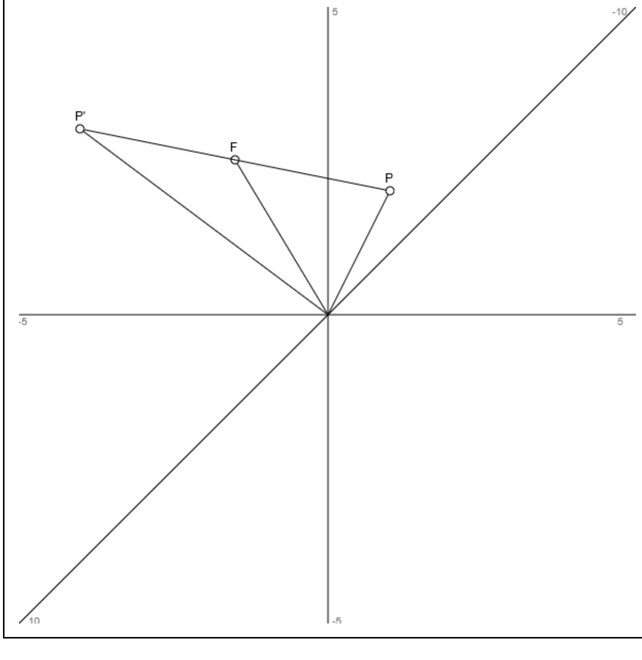
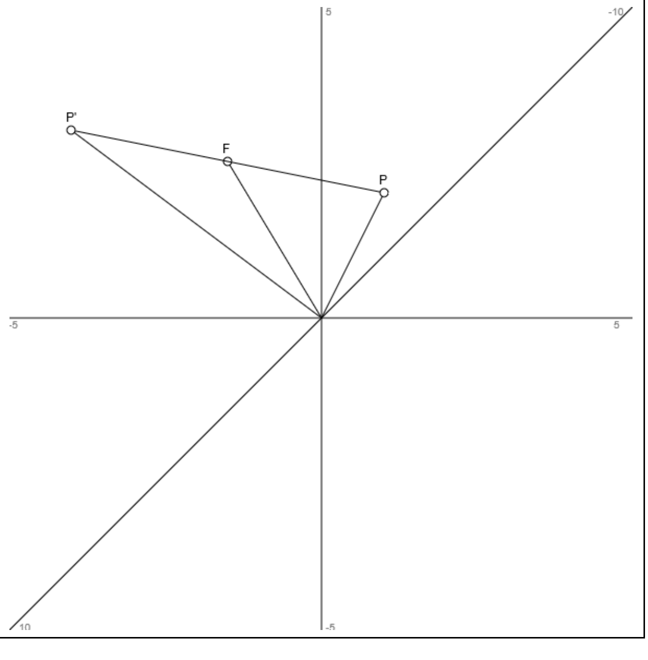
lässt sich der gespiegelte Punkt am schnellsten berechnen.
Gerade die Spiegelformel (**) lässt für weitere Berechnungen umstellen zu:

$$\overrightarrow{OP}' = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}$$
$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP}'$$
$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP}'\right),$$

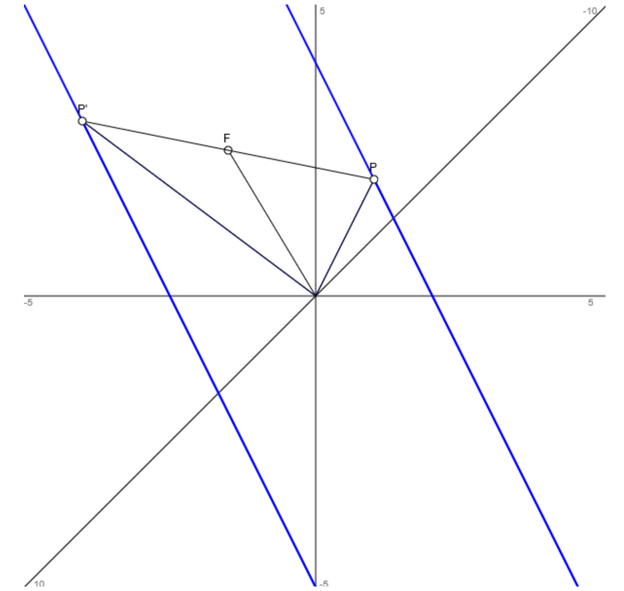
d.h. der Spiegelpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten P und P‘.

Übersicht

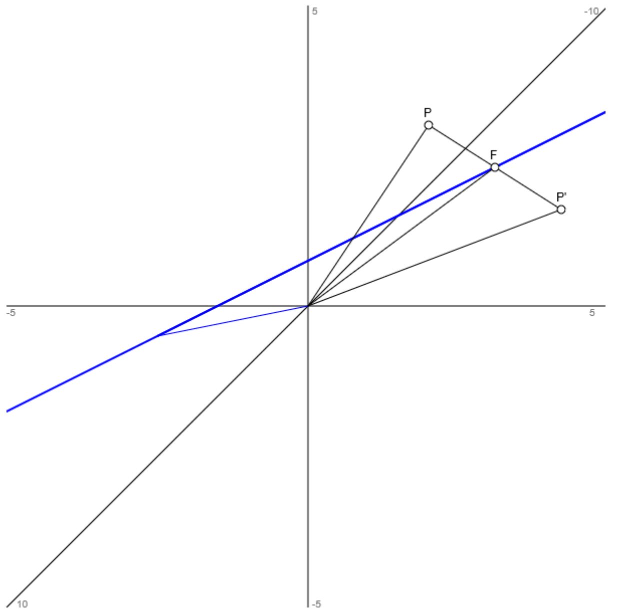
Es gilt für die Spiegelungen mit Punkten die folgende Übersicht:

Punktspiegelung	**Spiegelung eines Punktes**
Punktspiegelung eines Punktes P an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P‘: 	Punktspiegelung eines Punktes P an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P‘: 

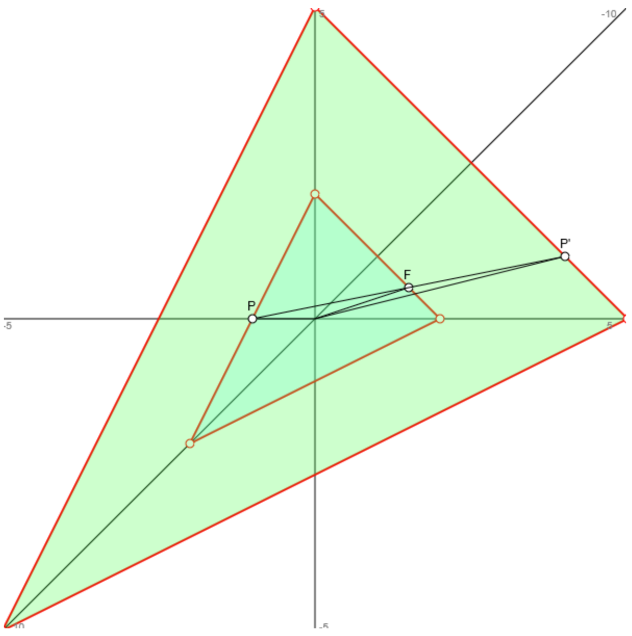
Punktspiegelung einer <u>Geraden</u> g: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{u}$ an Spiegelpunkt F zur (parallelen) gespiegelten Geraden g‘: $\vec{x} = \vec{OP'} + t\,\vec{u}$ (g || g‘) vermöge der Punktspiegelung des Punktes Pεg (Stützvektor der Geraden g) an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P’εg‘ (Stützvektor der Geraden g‘):



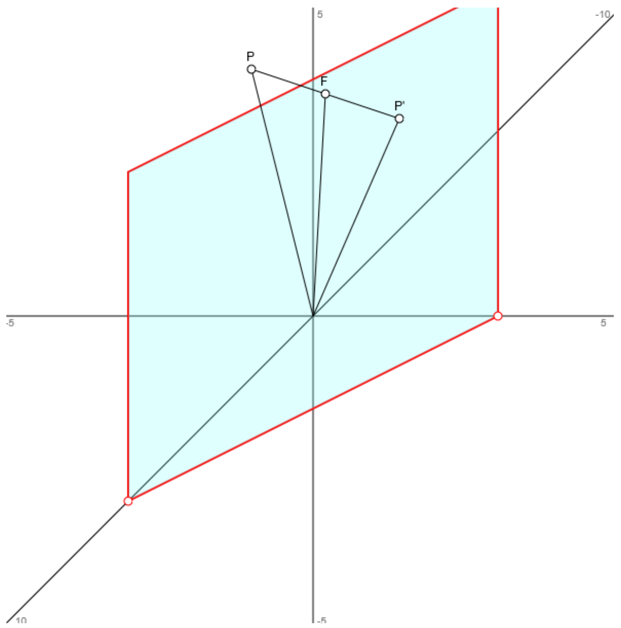
Spiegelung eines <u>Punkt</u>es P an Spiegelgerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ über den Lotfußpunkt Fεg mit: $\vec{PF} \cdot \vec{u} = 0$ (Orthogonalitätsbedingung bei laufendem Punkt F_tεg, Verfahren mit Hilfsebene E_H: $\vec{u} \cdot \vec{x} = \vec{u} \cdot \vec{OP}$) zum gespiegelten Punkt P‘:



Punktspiegelung einer <u>Ebene</u> E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ an Spiegelpunkt F zur (parallelen) gespiegelten E‘: $ax_1+bx_2+cx_3 = d'$ (E || E‘) vermöge der Punktspiegelung des Punktes PεE (Stützvektor der Ebene E) an Spiegelpunkt F zum gespiegelten Punkt P’εE‘ (Stützvektor der Ebene E‘) und vermöge der Identitäten: $\vec{n} \cdot \vec{OP} = d$, $\vec{n} \cdot \vec{OP'} = d'$, Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:



Spiegelung eines <u>Punkt</u>es P an Spiegelebene E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ über den Lotfußpunkt FεE (als Schnittpunkt von Lotgeraden h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n}$ und Ebene E, Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$) zum gespiegelten Punkt P‘:



Spiegelung: P -> F -> P‘

Spiegelformel: $\vec{OP'} = \vec{OP} + 2\,\vec{PF} = \vec{OF} + \vec{PF} = 2\,\vec{OF} - \vec{OP}$

Beispiele:

a) Bei Spiegelung des Punktes P(3|4|-5) am Spiegelpunkt F(0|0|7) entsteht vermöge der Spiegelformel (**):

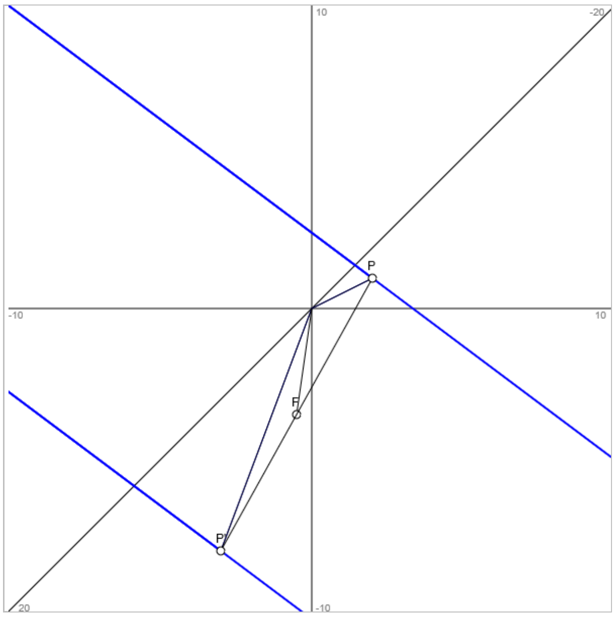
$$\vec{OP'} = 2\vec{OF} - \vec{OP} = 2\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\19\end{pmatrix}$$

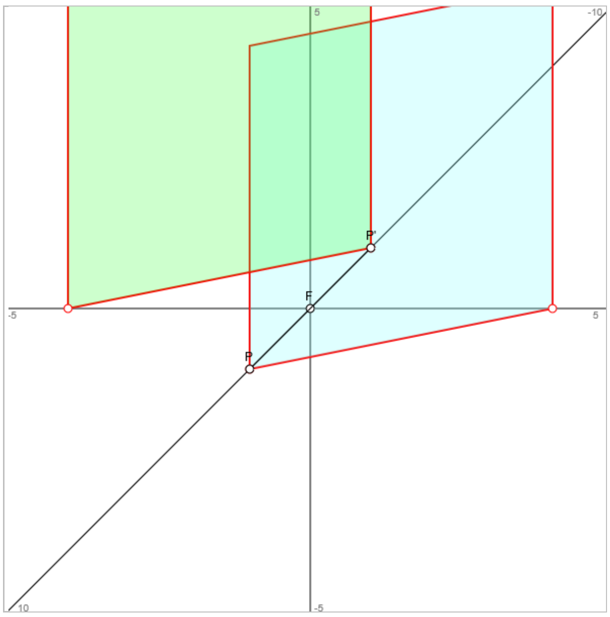
der gespiegelte Punkt P'(-3|-4|19). Umgekehrt ergibt sich aus P'(-3|-4|19) und F(0|0|7) der ursprüngliche Punkt P(3|4|-5) mit: $\vec{OP} = 2\vec{OF} - \vec{OP'} = 2\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-4\\19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$. Schließlich ist F(0|0|7) die Mitte zwischen P(3|4|-5) und P'(-3|-4|19) wegen: $\vec{OF} = \frac{1}{2}\left(\vec{OP} + \vec{OP'}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\-4\\19\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}$.

b) Die Punktspiegelung der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ über den Spiegelpunkt F(3|1|-2) ergibt mit dem Stützvektor als zu spiegelndem Punkt P(-2|1|0) und dem gespiegelten Punkt P'(8|1|-4) gemäß (**):

$$\vec{OP'} = 2\vec{OF} - \vec{OP} = 2\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}$$

die zu g parallele, durch P' verlaufende gespiegelte Gerade g': $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$.





c) Die Ebene E: $2x_1 + x_2 = 4$ wird am Ursprung O = F(0|0|0) des Koordinatensystems gespiegelt, indem z.B. der Spurpunkt S_1 = P(2|0|0) der Ebene am Ursprung zu S_1' = P'(-2|0|0) gespiegelt wird. Die zu E parallele gespiegelte Ebene E' errechnet sich etwa durch Einsetzen des Punktes S_1' als:

E': $2x_1 + x_2 = 2\cdot(-2) + 0 = -4$.

Werden also Ebenen E: $ax_1+bx_2+cx_3 = d$ am Ursprung O(0|0|0) des Koordinatensystems gespiegelt, so ist die gespiegelte Ebene von der Form E': $ax_1+bx_2+cx_3 = -d$.

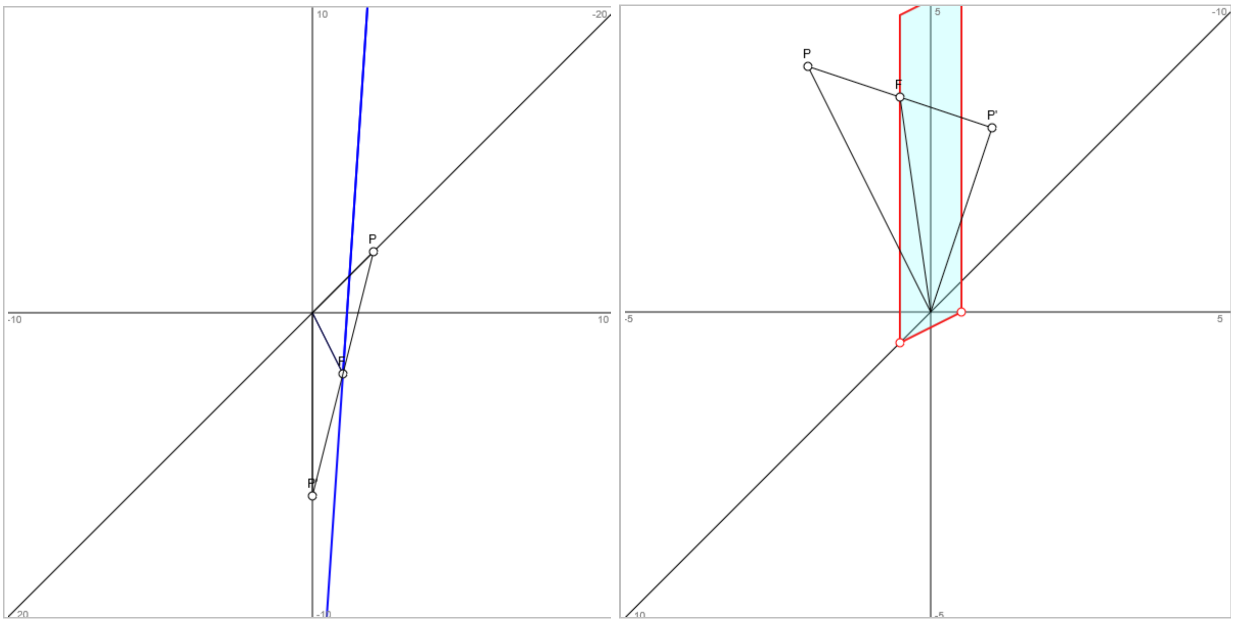
d) Das Spiegeln des x_1-Achsen-Punktes P(-4|0|0) an der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ soll mit dem Hilfsebenenverfahren geschehen. Dazu bilden wir die Hilfsebene E: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇔

E: $x_1 + x_2 + 8x_3 = -4$ und lassen diese mit der Geraden g zum Lotfußpunkt F schneiden:
g -> $x_1 = 1+r$, $x_2 = 1+r$, $x_3 = -9+8r$ -> E ->
(1+r) + (1+r) + 8(-9+8r) = -4 ⇔ 66r – 70 = -4 ⇔ 66r = 66 ⇔ r = 1 ->

$\vec{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ -> F(2|2|-1).

Die Spiegelformel (**) führt auf den gespiegelten Punkt P‘:

$\vec{OP'} = 2\vec{OF} - \vec{OP} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ -> P‘(8|4|-2).



e) Das Spiegeln des Punktes P(0|-2|4) an der Spiegelebene E: $x_1+2x_2 = 1$ erfolgt mit dem Lotgeradenverfahren und der Lotgeraden h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt von Lotgeraden und Ebene ist der Lotfußpunkt F:

h -> $x_1 = r$, $x_2 = -2+2r$, $x_3 = 4$ -> E ->
r + 2(-2+2r) = 1 ⇔ 5r – 4 = 1 ⇔ 5r = 5 ⇔ r = 1 ->

$\vec{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ -> F(1|0|4).

Die Spiegelformel (**) ergibt den gespiegelten Punkt P‘(2|2|4) gemäß: $\vec{OP'} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.