

Mathematik > Vektorrechnung > Spiegelungen an Grundebenen, Achsen und Ursprung des Koordinatensystems

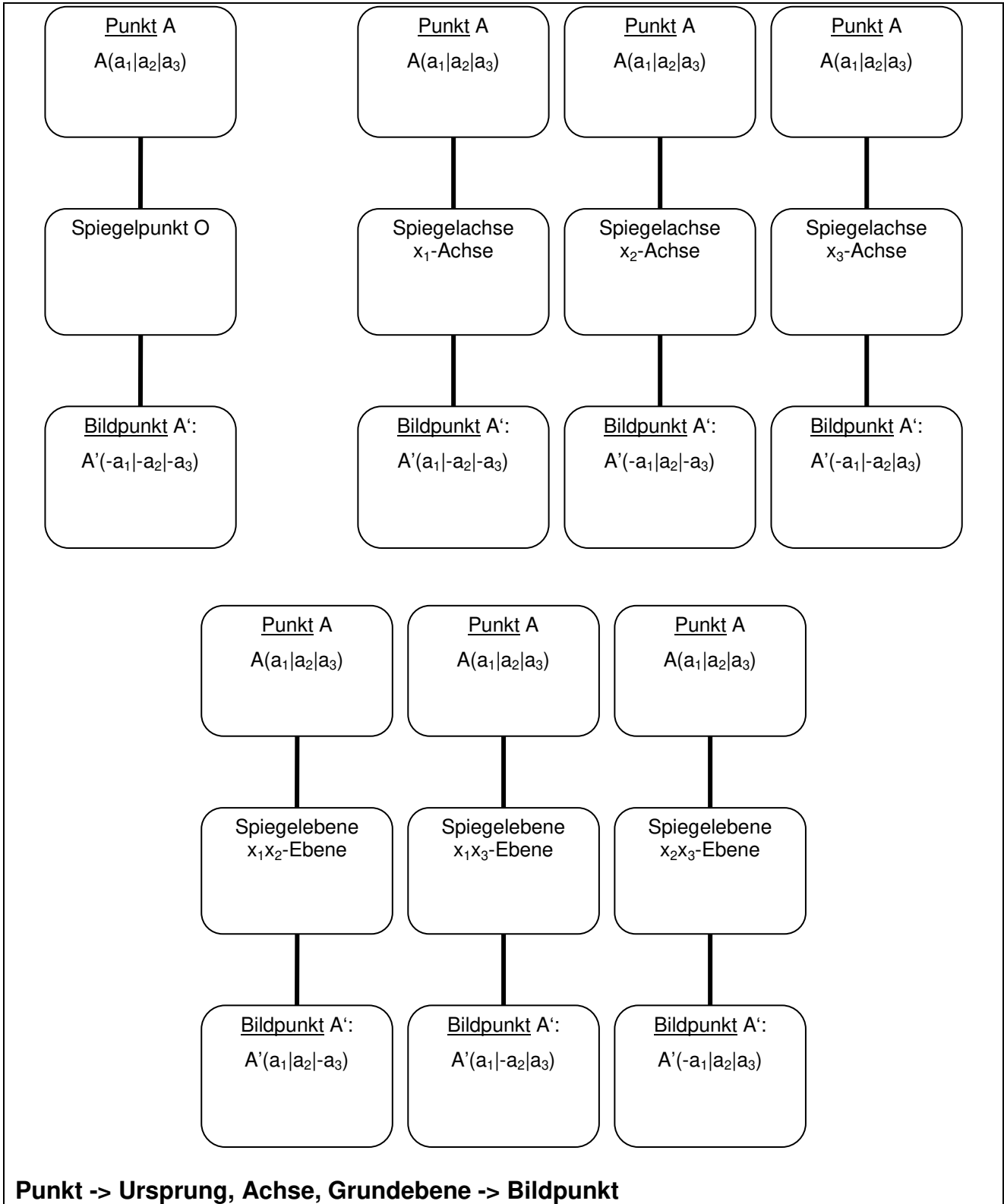
Einleitung

Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum \mathbf{R}^3 identifizieren mit Ortsvektoren \vec{OP} (mit: $O(0|0|0)$ als Koordinatenursprung), Linearkombinationen von Vektoren sind Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$, $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$, $g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ und Ebenen $E: \vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$, $E_1: \vec{x} = \vec{b}_1 + r\vec{v}_1 + s\vec{w}_1$, $E_2: \vec{x} = \vec{b}_2 + t\vec{v}_2 + u\vec{w}_2$ (mit Stützvektoren, Richtungs- und Spannvektoren sowie den reellen Parametern). Geraden liegen nur in Parameterform vor, bei den Ebenen ergeben sich die Formen: $E: \vec{x} = \vec{b} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (Parameterform), $E: \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} - \vec{p} \end{pmatrix} = 0$ (Normalenform), $E: \vec{n}^0 \cdot \begin{pmatrix} \vec{x} - \vec{p} \end{pmatrix} = 0$ (Hesse'sche Normalenform), $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform) (unter Beachtung des Skalar- und Kreuzprodukts zwischen den Vektoren).

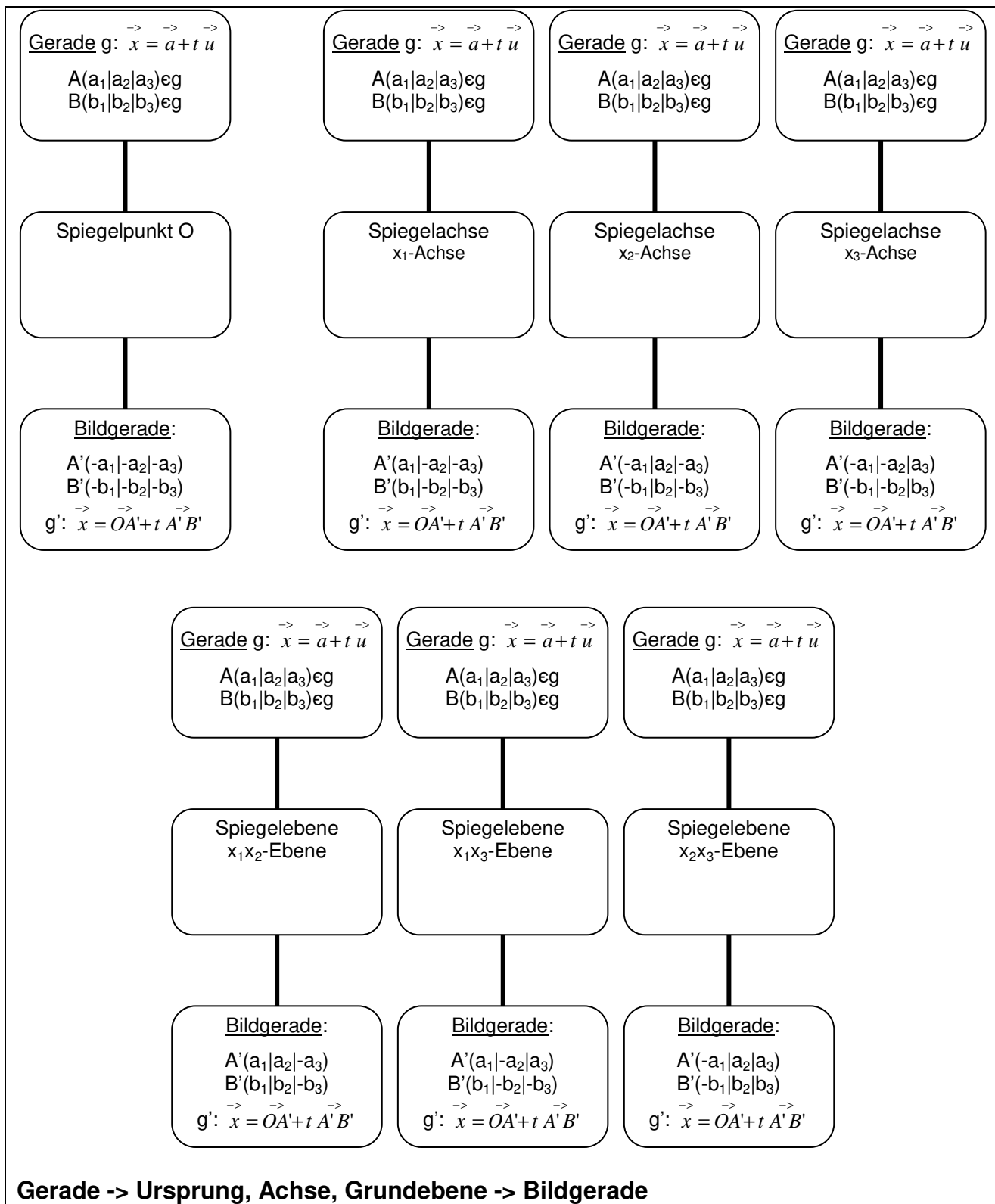
Es gilt dann für die Spiegelungen von Punkten, Geraden und Ebenen an Punkten, Geraden und Ebenen: Punkt \rightarrow Spiegelpunkt/-gerade/-ebene \rightarrow Bildpunkt; Gerade \rightarrow 2 Punkte auf der Geraden \rightarrow Spiegelpunkt/-gerade/-ebene \rightarrow Bildpunkte \rightarrow gespiegelte Gerade; Ebene \rightarrow 3 Punkte auf der Ebene \rightarrow Spiegelpunkt/-gerade/-ebene \rightarrow Bildpunkte \rightarrow gespiegelte Ebene. Gespiegelt wird nach immer der gleichen Vorgehensweise: Ist A ein zu spiegelnder Punkt und F der Punkt, um den gespiegelt wird, bzw. der Lotpunkt zu A auf Spiegelgeraden bzw. Spiegelebene, so ergibt sich der Bildpunkt A' als:

$$\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}, \quad \vec{OA}' = \vec{OF} + \vec{AF}, \quad \vec{OA}' = 2\vec{OF} - \vec{OA} \quad (\text{Spiegelformel}).$$

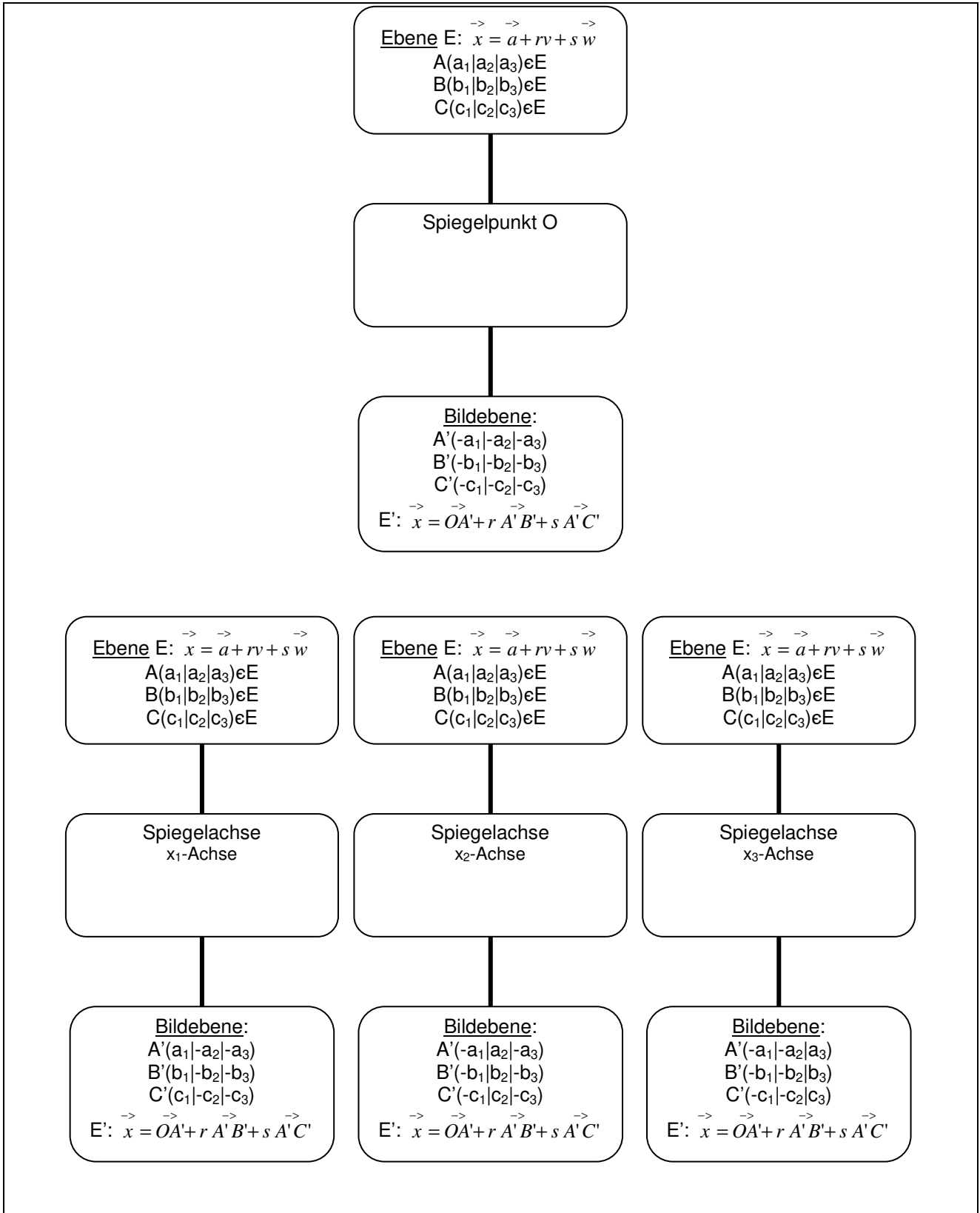
Spiegelung von Punkten

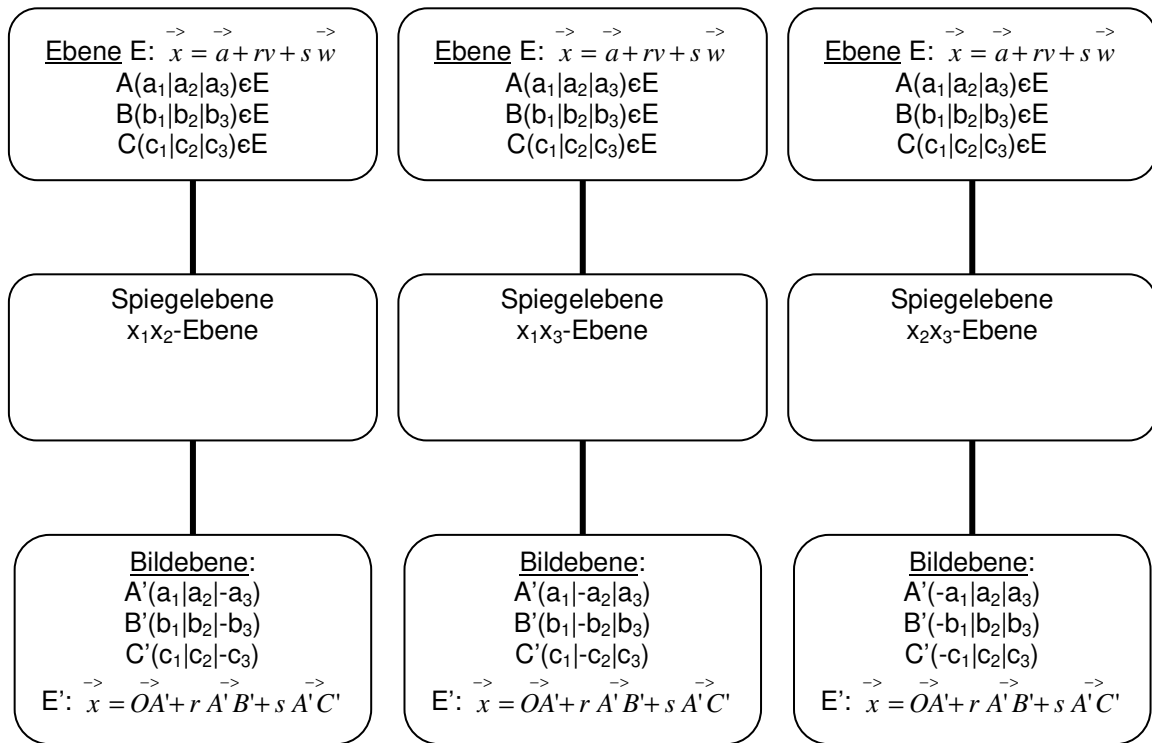


Spiegelung von Geraden



Spiegelung von Ebenen





Ebene -> Ursprung, Achse, Grundebene -> Bildebene