Michael Buhlmann
Mathematik > Vektorrechnung > Zusammenfassung

(Gymnasiale Oberstufe: Mathematik Grundkurs, 3-stündig)

Grundlagen

Lineare Gleichungssysteme: $\left(\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & ... \\ a_{mn} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ -> $\left(\begin{array}{cccc\|c} * & * & ... & * & * \\ 0 & * & ... & * & * \\ ... & & & & ... \\ 0 & 0 & ... & a & b \end{array}\right)$ -> $\begin{cases} a \neq 0 \quad -> 1\ Lsg. \\ a = 0, b \neq 0 -> 0\ Lsg. \\ a = 0, b = 0 -> u.v.Lsg. \end{cases}$	
Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Punkt A($a_1\|a_2\|a_3$), Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Ortsvektor: $\vec{a} = \vec{OA}$ Länge, Betrag: $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ Einheitsvektor: $\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{\left\|\vec{a}\right\|}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$	Differenzvektor: $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ Linearkombination: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$, $r\vec{a} = r\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$, Gegenvektor: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$, Mitte: $\vec{OM} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} \\ \frac{a_3 + b_3}{2} \end{pmatrix}$ Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cos\varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ Kreuzprodukt, Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ Spatprodukt: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} =$ $(a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3$

Konstruktionen

Voraussetzung	**Konstruktion**
Punkt A, Richtungsvektor $\vec{u}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)
Punkte A, B	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AB} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF) Punkt A$\notin g_1$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{u}_1$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{u} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) als zu g_1 parallele Gerade durch den Punkt A (g || g_1)
Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ || h: $\vec{x} = \vec{b} + t\,\vec{u}$ (PF)	Mitte $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ -> Mittelparallele k: $\vec{x} = \vec{OM} + t\,\vec{u}$ (PF) (k || g || h)
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF), Punkt A	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{n}$, Parameter t -> Gerade: g: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{n} = \vec{a} + t\,\vec{n}$ (PF) als zu E senkrechte Gerade durch den Punkt A (g $\perp$ E)

Geradenkonstruktionen

Voraussetzung	**Konstruktion**
Punkt A, Richtungsvektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF)
Punkte $A(a_1\|a_2\|a_3)$, $B(b_1\|b_2\|b_3)$, $C(c_1\|c_2\|c_3)$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AB}$, $\vec{w} = \vec{AC}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{OA} + r\,\vec{AB} + s\,\vec{AC}$ (PF); Lineares Gleichungssystem: $\left(\begin{array}{l} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 1 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 1 \end{array}\right)$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit O(0|0|0)$\notin$E)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u}$ (PF) Punkt P$\notin$g	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AP}$, Parameter t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ (PF)
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + s\,\vec{u}$ (PF) Punkt P	Ebene: E: $\vec{u}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Gerade g senkrechte Ebene durch den Punkt P (E $\perp$ g)
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ (PF), Schnittpunkt S ($g_1 \cap g_2 = \{S\}$), Punkte $P(p_1\|p_2\|p_3)$, $Q(q_1\|q_2\|q_3)$εg_1, $R(r_1\|r_2\|r_3)$εg_2	Stützvektor $\vec{b} = \vec{OS}$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u}_1 + t\,\vec{u}_2$ (PF); LGS: $\left(\begin{array}{l} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{array}\right)$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit O(0|0|0)$\notin$E)

Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ (PF), Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$ (PF), $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \cap g_2 = \{\}$, Punkte $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$, $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3) \varepsilon g_1$, $R(r_1 \mid r_2 \mid r_3) \varepsilon g_2$	Stützvektor $\vec{b} = \vec{a}_1$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}$, $\vec{v} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$, Parameter s, t -> Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$ LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix}$ -> Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0 \mid 0 \mid 0) \notin E$)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Punkt P, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	Ebene: F: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Ebene E parallele Ebene durch den Punkt P ($F \parallel E$)
E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Abstand D, Normalenvektor $\vec{n} = (a \quad b \quad c)^T$	F_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - \lvert\vec{n}\rvert D$, F_2: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + \lvert\vec{n}\rvert D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D ($F_1 \parallel F_2 \parallel E$)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF), bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Punkte A, B	Normalenvektor $\vec{n}$, Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x} = \vec{OA} + t\,\vec{AB} + u\,\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Punkte A, B ($F \perp E$)
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF), bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)	Normalenvektor $\vec{n}$, Parameter t, u -> Ebene: F: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u} + u\,\vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g ($F \perp E$)

Ebenenkonstruktionen

E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$ (PF) -> $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ -> E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (NF) -> E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{b}$ -> E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)

Ebene in Parameter-, Normalen-, Koordinatenform

Lagebeziehungen

Voraussetzung	Abstand
Punkte $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$, $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$	$\overline{PQ}$ = d(P,Q) = $\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$

Abstand zwischen zwei Punkten

Voraussetzung	Abstand
Ebene E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ (KF), Punkt $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$	Normalenvektor $\vec{n}$, Punkt P -> Lotgerade h: $\vec{x} = \vec{OP} + t\,\vec{n}$ -> Lotfußpunkt F als Schnittpunkt von Lotgerade und Ebene -> d(P,E) = d(P,F) = $\lvert\vec{PF}\rvert$
Ebene E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ (KF), Punkt $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$	Hessesche Normalform -> d(P,E) = $\dfrac{\lvert\vec{n} \cdot \vec{OP} - d\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert} = \dfrac{\lvert n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - d\rvert}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$

Ebene E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ (KF), Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$, g || E	d(g,E) = d(P,E) mit P∊g und $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$
Ebenen E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ (KF), F: $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = e$ (KF), E || F	d(F,E) = d(P,E) bzw. d(F,E) = $\left\| \frac{d}{\left\|\vec{n}\right\|} - \frac{e}{\left\|\vec{m}\right\|} \right\|$ mit P∊F bzw. Normalenvektorn $\vec{n}$, $\vec{m}$

Abstand zwischen Punkt und Ebene, zwischen Gerade und Ebene, zwischen parallelen Ebenen

Voraussetzung	**Winkel**
	Kosinus-Formel ->
Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$	$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|}$ (spitzer, stumpfer Winkel)
Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden g$_1$: $\vec{x} = \vec{a}_1 + s\,\vec{u}_1$ und g$_2$: $\vec{x} = \vec{a}_2 + t\,\vec{u}_2$	$\cos\varphi = \frac{\left\|\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\right\|}{\left\|\vec{u}_1\right\|\cdot\left\|\vec{u}_2\right\|}$ (spitzer Winkel)
Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Ebenen E$_1$: $\vec{n}_1\,\vec{x} = d_1$ (NF) und E$_2$: $\vec{n}_2\,\vec{x} = d_2$ (NF)	$\cos\varphi = \frac{\left\|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right\|}{\left\|\vec{n}_1\right\|\cdot\left\|\vec{n}_2\right\|}$ (spitzer Winkel)

Winkel zwischen je zwei Vektoren, Geraden, Ebenen

Voraussetzung	**Winkel**
	Sinus-Formel ->
Schnittwinkel φ zwischen einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ und einer Ebene E: $\vec{n}\,\vec{x} = d$ (NF)	$\sin\varphi = \frac{\left\|\vec{u}\cdot\vec{n}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{n}\right\|}$ (spitzer Winkel)

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Voraussetzung	**Spurpunkte, Lage der Geraden**
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$	$x_1 = 0$ -> $a_1 + tu_1 = 0$ -> $t = t_1 = -a_1/u_1$ -> $S_1(0\|a_2+t_1u_2\|a_3+t_1u_3)$ (Spurpunkt mit x_2-x_3-Ebene, falls $u_1≠0$; kein Spurpunkt, falls $u_1=0$) $x_2 = 0$ -> $a_2 + tu_2 = 0$ -> $t = t_2 = -a_2/u_2$ -> $S_2(a_1+t_2u_1\|0\|a_3+t_2u_3)$ (Spurpunkt mit x_1-x_3-Ebene, falls $u_2≠0$; kein Spurpunkt, falls $u_2=0$) $x_3 = 0$ -> $a_3 + tu_3 = 0$ -> $t = t_3 = -a_3/u_3$ -> $S_3(a_1+t_3u_1\|a_2+t_3u_2\|0)$ (Spurpunkt mit x_1-x_2-Ebene, falls $u_3≠0$; kein Spurpunkt, falls $u_3=0$)
	$u_1 = 0$ -> g || x_2-x_3-Ebene $u_2 = 0$ -> g || x_1-x_3-Ebene $u_3 = 0$ -> g || x_1-x_2-Ebene $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_1-Achse $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ -> g || x_2-Achse $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ -> g || x_3-Achse

Spurpunkte, Lage von Geraden

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Ebene
Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ a≠0, b≠0, c≠0	S_1(d/a|0|0) (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) S_2(0|d/b|0) (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) S_3(0|0|d/c) (Schnittpunkt mit der x_3-Achse)
Ebene E: $bx_2 + cx_3 = d$ b≠0, c≠0	S_2(0|d/b|0) (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) S_3(0|0|d/c) (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1-Achse
Ebene E: $ax_1 + cx_3 = d$ a≠0, c≠0	S_1(d/a|0|0) (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) S_3(0|0|d/c) (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_2-Achse
Ebene E: $ax_1 + bx_2 = d$ a≠0, b≠0	S_1(d/a|0|0) (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) S_2(0|d/b|0) (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_3-Achse
Ebene E: $ax_1 = d$ a≠0	S_1(d/a|0|0) (Schnittpunkt mit der x_1-Achse) -> Ebene parallel zur x_2- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_2-x_3-Ebene
Ebene E: $bx_2 = d$ b≠0	S_2(0|d/b|0) (Schnittpunkt mit der x_2-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_3-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_3-Ebene
Ebene E: $cx_3 = d$ c≠0	S_3(0|0|d/c) (Schnittpunkt mit der x_3-Achse) -> Ebene parallel zur x_1- und x_2-Achse -> Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene

Spurpunkte, Lage von Ebenen

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)	Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ -> 1 Lösung: Pεg; keine Lösung: P∉g

Lage Punkt – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{a_1} + s\,\vec{u_1}$ (PF) Gerade g_2: $\vec{x} = \vec{a_2} + t\,\vec{u_2}$ (PF)	a) Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\vec{a_1} + s\,\vec{u_1} = \vec{a_2} + t\,\vec{u_2}$ -> unendlich viele Lösungen: $g_1 = g_2$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$; keine Lösung: Geraden parallel oder windschief b) Überprüfung auf Parallelität: $\vec{u_1} = k\,\vec{u_2}$ -> 1 Lösung: g_1 || g_2, keine Lösung: g_1, g_2 windschief c) Abstand (bei parallelen Geraden): d(g_1,g_2) = d(A_2,g_1) mit Punkt A_2εg_2, z.B. mit $\vec{a_2} = \vec{OA_2}$ d) Abstand (bei windschiefen Geraden, Lotfußpunktverfahren): P_Lεg_1, Q_Lεg_2 mit: $\vec{P_LQ_L} \cdot \vec{u_1} = 0$, $\vec{P_LQ_L} \cdot \vec{u_2} = 0$, d($g_1$,$g_2$) = $\left\|\vec{P_LQ_L}\right\|$; e) Abstand (bei windschiefen Geraden, Hilfsebenenverfahren): Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u_1} \times \vec{u_2}$, Hilfsebene E_H: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{a_1}) = 0$ (NF) mit E_H || g_2, d(g_1,g_2) = d(A_2, E_H) mit A_2εg_2, z.B. mit $\vec{a_2} = \vec{OA_2}$ (Hessesche Normalform); Formel: d(g_1,g_2) = $\left\|\vec{n}\left(\vec{a_2} - \vec{a_1}\right)\right\| / \left\|\vec{n}\right\|$ f) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Geraden): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}\right\| / \left\|\vec{u_1}\right\| \cdot \left\|\vec{u_2}\right\|\right)$

Lage Gerade – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P(p_1|p_2|p_3) Ebene: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{b} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$ -> 1 Lösung: Pεg; keine Lösung: P$\notin$g b) Punktprobe: $ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$ -> wahre Aussage: Pεg; falsche Aussage: P$\notin$g c) Abstand (Hessesche Normalform): d(P,E) = $\left\| \vec{n} \cdot \vec{OP} - d \right\| / \left\| \vec{n} \right\| = \frac{\|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Lage Punkt – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF) Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF)	a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene (KF, NF) -> unendlich viele Lösungen: $g \subset E$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$; keine Lösung: g || E b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): d(g,E) = d(A,E) mit Punkt Aεg, z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1}\left(\left\| \vec{n} \cdot \vec{u} \right\| / \left\| \vec{n} \right\| \cdot \left\| \vec{u} \right\| \right)$

Lage Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
E_1: $\vec{x} = \vec{b_1} + r\,\vec{v_1} + s\,\vec{w_1}$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b_2} + t\,\vec{v_2} + u\,\vec{w_2}$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n_1} = \vec{v_1} \times \vec{w_1}$, $\vec{n_2} = \vec{v_2} \times \vec{w_2}$	a) Gleichsetzen der Ebenengleichungen E_1, E_2 (PF): $\vec{b_1} + r\,\vec{v_1} + s\,\vec{w_1} = \vec{b_2} + t\,\vec{v_2} + u\,\vec{w_2}$ bzw. Einsetzen der Ebenenkomponenten x_1, x_2, x_3 der Ebene E_1 (PF) in die Ebene E_2 (KF) bzw. Lösen des linearen Gleichungssystems der Ebenen E_1, E_2 (KF): $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix}$ -> unendlich viele Lösungen (mit zwei Parametern): $E_1 = E_2$, unendlich viele Lösungen (mit einem Parameter): Schnittgerade g mit $E_1 \cap E_2 = g$; keine Lösung: E_1 || E_2 b) Abstand (bei Parallelität der Ebenen): d(E_1,E_2) = d(A,E_1) mit Punkt AεE_2 (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Ebenen): $\varphi = \cos^{-1}\left(\left\| \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} \right\| / \left\| \vec{n_1} \right\| \cdot \left\| \vec{n_2} \right\| \right)$

Lage Ebene – Ebene

Voraussetzung	Lage
Gerade: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF) Ebene E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a\ b\ c)^T$) (KF)	a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ -> g || E b) $\vec{u} = k\,\vec{n}$ -> g $\perp$ E

Orthogonalität, Parallelität Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage
E_1: $\vec{x} = \vec{b_1} + r\vec{v_1} + s\vec{w_1}$ (PF) bzw. E_1: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E_2: $\vec{x} = \vec{b_2} + t\vec{v_2} + u\vec{w_2}$ (PF) bzw. E_2: $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n_1} = \vec{v_1} \times \vec{w_1}$, $\vec{n_2} = \vec{v_2} \times \vec{w_2}$	a) $\vec{n_1} = k\vec{n_2}$ -> $E_1 \parallel E_2$ b) $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ -> $E_1 \perp E_2$

Orthogonalität, Parallelität Ebene – Ebene

Spiegelungen

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, Ursprung O(0|00) ->	Bildpunkt $A'(-a_1\|-a_2\|-a_3)$
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF), Ursprung O(0|00) ->	Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(-a_1\|-a_2\|-a_3)$ -> gespiegelte Gerade: g': $\vec{x} = \vec{OA'} + t\vec{u}$ (PF) mit g' || g
Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Ursprung O(0|00) ->	Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(-a_1\|-a_2\|-a_3)$ -> gespiegelte Ebene: E': $\vec{n}(\vec{x} - \vec{OA'}) = 0$ (NF) mit E' || E

Spiegelungen am Ursprung

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, x_1-Achse -> Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, x_2-Achse -> Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, x_3-Achse ->	Bildpunkt A': $A'(a_1\|-a_2\|-a_3)$ Bildpunkt A': $A'(-a_1\|a_2\|-a_3)$ Bildpunkt A': $A'(-a_1\|-a_2\|a_3)$
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF), $A(a_1\|a_2\|a_3)$єg, $B(b_1\|b_2\|b_3)$єg -> x_1-Achse x_2-Achse x_3-Achse	Bildpunkte A', B': $A'(a_1\|-a_2\|-a_3)$, $B'(b_1\|-b_2\|-b_3)$ Bildpunkte A', B': $A'(-a_1\|a_2\|-a_3)$, $B'(-b_1\|b_2\|-b_3)$ Bildpunkte A', B': $A'(-a_1\|-a_2\|a_3)$, $B'(-b_1\|-b_2\|b_3)$ -> Bildgerade: g': $\vec{x} = \vec{OA'} + t\vec{A'B'}$
Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (PF), $A(a_1\|a_2\|a_3)$єE, $B(b_1\|b_2\|b_3)$єE, $C(c_1\|c_2\|c_3)$єE -> x_1-Achse x_2-Achse x_3-Achse	Bildpunkte A', B', C': $A'(a_1\|-a_2\|-a_3)$, $B'(b_1\|-b_2\|-b_3)$, $C'(c_1\|-c_2\|-c_3)$ Bildpunkte A', B', C': $A'(-a_1\|a_2\|-a_3)$, $B'(-b_1\|b_2\|-b_3)$, $C'(-c_1\|c_2\|--c_3)$ Bildpunkte A', B', C': $A'(-a_1\|-a_2\|a_3)$, $B'(-b_1\|-b_2\|b_3)$, $C'(-c_1\|-c_2\|c_3)$ -> Bildebene: E': $\vec{x} = \vec{OA'} + r\vec{A'B'} + s\vec{A'C'}$

Spiegelungen an Koordinatenachsen

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, x_1-x_2-Ebene -> Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, x_1-x_3-Ebene -> Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, x_2-x_3-Ebene ->	Bildpunkt A': $A'(a_1\|a_2\|-a_3)$ Bildpunkt A': $A'(a_1\|-a_2\|a_3)$ Bildpunkt A': $A'(-a_1\|a_2\|a_3)$
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF), $A(a_1\|a_2\|a_3)$єg, $B(b_1\|b_2\|b_3)$єg -> x_1-x_2-Ebene x_1-x_3-Ebene x_2-x_3-Ebene	Bildpunkte A', B': $A'(a_1\|a_2\|-a_3)$, $B'(b_1\|b_2\|-b_3)$ Bildpunkte A', B': $A'(a_1\|-a_2\|a_3)$, $B'(b_1\|-b_2\|b_3)$ Bildpunkte A', B': $A'(-a_1\|a_2\|a_3)$, $B'(-b_1\|b_2\|b_3)$ -> Bildgerade: g': $\vec{x} = \vec{OA'} + t\vec{A'B'}$

Ebene: E: $\vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{v} + s\,\vec{w}$ (PF), $A(a_1\|a_2\|a_3)\epsilon E$, $B(b_1\|b_2\|b_3)\epsilon E$, $C(c_1\|c_2\|c_3)\epsilon E$ -> x_1-x_2-Ebene x_1-x_3-Ebene x_2-x_3-Ebene	 Bildpunkte A', B', C': $A'(a_1\|a_2\|-a_3)$, $B'(b_1\|b_2\|-b_3)$, $C'(c_1\|c_2\|-c_3)$ Bildpunkte A', B', C': $A'(a_1\|-a_2\|a_3)$, $B'(b_1\|-b_2\|b_3)$, $C'(c_1\|-c_2\|-c_3)$ Bildpunkte A', B', C': $A'(-a_1\|a_2\|a_3)$, $B'(-b_1\|b_2\|b_3)$, $C'(-c_1\|c_2\|c_3)$ -> Bildebene: E': $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + r\,\overrightarrow{A'B'} + s\,\overrightarrow{A'C'}$

Spiegelungen an Koordinatenebenen

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, Spiegelpunkt $F(f_1\|f_2\|f_3)$	Bildpunkt $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AF}$ bzw. $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AF}$ bzw. $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA}$ -> Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF), Spiegelpunkt $F(f_1\|f_2\|f_3)$	Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$ mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$ -> gespiegelte Gerade: g': $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + t\,\vec{u}$ (PF) mit g' || g
Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Spiegelpunkt $F(f_1\|f_2\|f_3)$	Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$ mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$ -> gespiegelte Ebene: E': $\vec{n}(\vec{x} - \overrightarrow{OA'}) = 0$ (NF) mit E' || E

Punktspiegelungen

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, Spiegelpunkt $F(f_1\|f_2\|f_3)$	Bildpunkt $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AF}$ bzw. $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AF}$ bzw. $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA}$ -> Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$
Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$, Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$ (KF)	Lotfußpunkt $F\varepsilon E_S$ mit Hilfsgerade: h: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{n}_S$ (PF), $E_S \cap h = \{F\}$ (Hilfsgeradenverfahren) -> Bildpunkt $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AF}$ bzw. $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AF}$ bzw. $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA}$ -> Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$

Spiegelung von Punkten

Voraussetzung	Spiegelung
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF), Spiegelpunkt $F(f_1\|f_2\|f_3)$	Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$ mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$ -> gespiegelte Gerade: g': $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + t\,\vec{u}$ (PF) mit g' || g
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (PF), Spiegelebene E_S: $\vec{n}_S \cdot \vec{x} = d_S$ (KF), g || E_S	Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$ mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, Lotfußpunkt $F\varepsilon E_S$ -> Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$ -> gespiegelte Gerade: g': $\vec{x} = \overrightarrow{OA'} + t\,\vec{u}$ (PF) mit g' || g

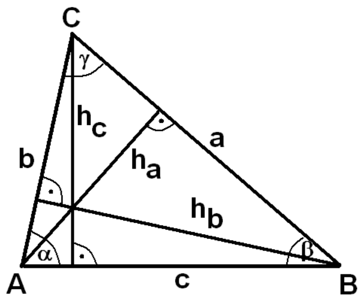
Spiegelung von Geraden

Voraussetzung	Spiegelung
Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Spiegelpunkt $F(f_1\|f_2\|f_3)$	Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$ mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$ -> gespiegelte Ebene: E': $\vec{n}(\vec{x} - \overrightarrow{OA'}) = 0$ (NF) mit E' || E
Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Spiegelgerade g_S: $\vec{x} = \vec{a}_S + t\,\vec{u}_S$ (PF), E || g_S	Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$ mit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, Punkt $F\varepsilon g_S$ -> Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$ -> gespiegelte Ebene: E': $\vec{n}(\vec{x} - \overrightarrow{OA'}) = 0$ (NF) mit E' || E

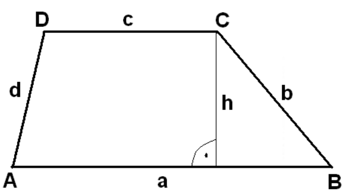
Ebene: E: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{a})=0$ (NF), Spiegelebene E_S: $\vec{n_S}\cdot\vec{x}=d_S$ (KF), E || E_S	Punkt $A(a_1\|a_2\|a_3)$ mit $\vec{OA}=\vec{a}$, Lotfußpunkt $F\varepsilon E_S$ -> Bildpunkt $A'(2f_1-a_1\|2f_2-a_2\|2f_3-a_3)$ -> gespiegelte Ebene: E': $\vec{n}(\vec{x}-\vec{OA'})=0$ (NF) mit E' || E

Spiegelungen von Ebenen

Geometrie

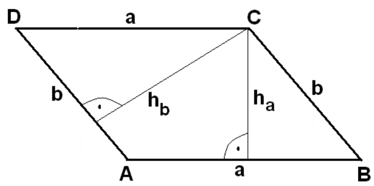
Dreieck ABC in der Ebene: E: $\vec{x}=\vec{OA}+r\,\vec{AB}+s\,\vec{AC}$ (PF), Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$, Winkel an den Ecken A, B, C: α, β, γ.	
$\vec{AB}\neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{AB}\neq k\,\vec{BC}$ für jedes reelle k => Dreieck $\vec{BC}\neq k\,\vec{AC}$ für jedes reelle k => Dreieck	
Seiten: $c=\left\|\vec{AB}\right\|$, $b=\left\|\vec{AC}\right\|$, $a=\left\|\vec{BC}\right\|$, Umfang: $u=\left\|\vec{AB}\right\|+\left\|\vec{AC}\right\|+\left\|\vec{BC}\right\|$	
$\left\|\vec{AB}\right\|=\left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel α) $\left\|\vec{AB}\right\|=\left\|\vec{BC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel β) $\left\|\vec{BC}\right\|=\left\|\vec{AC}\right\|$ => Dreieck gleichschenklig (Spitzenwinkel γ)	
Winkel: $\cos\alpha=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{AC}\right\|}$, $\cos\beta=-\frac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AB}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}$, $\cos\gamma=\frac{\vec{AC}\cdot\vec{BC}}{\left\|\vec{AC}\right\|\cdot\left\|\vec{BC}\right\|}$	Winkelsumme: α + β + γ = 180°
$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\vec{BC}\cdot\vec{AC}=0$ => Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
Höhen: $h_a=d(A, g_{BC})$, $h_b=d(B, g_{AC})$, $h_c=d(C, g_{AC})$ bzw. $h_a=\frac{\left\|\vec{AB}\cdot\times\vec{AC}\right\|}{\left\|\vec{BC}\right\|}$, $h_b=\frac{\left\|\vec{AB}\cdot\times\vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AC}\right\|}$, $h_c=\frac{\left\|\vec{AC}\times\vec{BC}\right\|}{\left\|\vec{AB}\right\|}$ usw.	
Fläche: $A=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$ bzw. $A=\frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\times\vec{AC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\times\vec{BC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\vec{AC}\times\vec{BC}\right\|$	

Dreieck

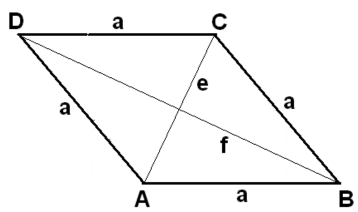
Trapez ABCD in der Ebene: E: $\vec{x}=\vec{OA}+r\,\vec{AB}+s\,\vec{AC}$ (PF) mit DεE, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: α, β, γ, δ.	
$\vec{AB}=k\,\vec{CD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\vec{AB}\parallel\vec{CD}$) $\vec{BC}=k\,\vec{AD}$ für ein gewisses k => Trapez ($\vec{BC}\parallel\vec{AD}$)	
Seiten: $a=\left\|\vec{AB}\right\|$, $b=\left\|\vec{BC}\right\|$, $c=\left\|\vec{CD}\right\|$, $d=\left\|\vec{AD}\right\|$,	

Umfang: $u = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\| + \left\|\overrightarrow{CD}\right\| + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$	
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$ => Trapez gleichschenklig $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ => Trapez gleichschenklig	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}$, $\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$, $\cos\gamma = -\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CD}\right\|}$, $\cos\delta = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{CD}\right\|}$	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360°
Höhe: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ => $h = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$, bzw. $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ => $h = \frac{\left\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$	
Fläche: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ => $A = \frac{a+c}{2}h$ bzw. $A = \left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| + \left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right\|$ bzw.: $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$ => $A = \frac{b+d}{2}h$ bzw. $A = \left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| + \left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right\|$	

Trapez

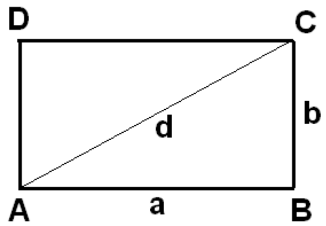
Parallelogramm ABCD in der Ebene: E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE, Seiten als Differenzvektoren: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: α, β, γ, δ.	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ => Parallelogramm $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ => Parallelogramm	
Seiten: $a = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$, Umfang: $u = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| + 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}$, $\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$ usw.	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ
Höhen: h_a = d(C, g_{AB}) bzw. $h_a = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$, h_b = d(C, g_{AD}) bzw. $h_b = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}$	
Fläche: $A = ah_a = bh_b$ bzw. bzw. $A = \left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\|$	

Parallelogramm

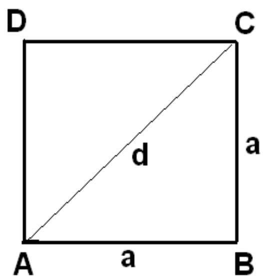
Raute ABCD als Parallelogramm mit gleich langen Seiten in der Ebene: E: $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE, Seiten als Differenzvektoren: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: α, β, γ, δ.	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ => Raute $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ => Raute	
Seiten: $a = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$, Umfang: $u = 4\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$	

Winkel: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AD}\rvert}$, $\cos\beta = -\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$ usw.	Winkelsumme: α + β + γ + δ = 360° α + β = 180°, γ + δ = 180° α = γ, β = δ
Höhe: $h = \frac{\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\rvert}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}$	
Fläche: $A = \frac{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BD}\rvert}{2}$ bzw. $A = \lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\rvert$	

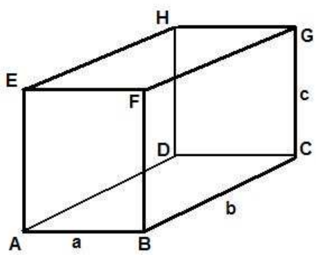
Raute

Rechteck ABCD als rechtwinkliges Parallelogramm in der Ebene: E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE, Seiten als Differenzvektoren: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: α, β, γ, δ.	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$ => Rechteck $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ => Rechteck	
Seiten: $a = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{CD}\rvert$, $b = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert$, Umfang: $u = 2\lvert\overrightarrow{AB}\rvert + 2\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$	
Fläche: $A = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ bzw. $A = \lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\rvert$	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

Rechteck

Quadrat ABCD als rechtwinkliges Parallelogramm mit gleich langen Seiten in der Ebene: E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF) mit DεE, Seiten als Differenzvektoren: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: α, β, γ, δ.	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ => Quadrat $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ => Quadrat	
Seiten: $a = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{CD}\rvert = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert$, Umfang: $u = 4\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	
Fläche: $A = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert^2$ bzw. $A = \lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\rvert$	Winkel: α = β = γ = δ = 90°

Quadrat

Quader (Würfel) ABCDEFGH mit Rechteck ABCD als Grund-, Rechteck EFGH als Deckfläche und rechten Winkeln.	
$a = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$, $b = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert$, $c = \lvert\overrightarrow{AE}\rvert$ (Kanten); a=b=c (Würfel)	
Grundfläche, Deckfläche: G = ab; G = a^2 (Würfel) Mantelfläche: M = (2a+2b)c; M = $4a^2$ (Würfel) Oberfläche: O = 2G + M = 2(ab+ac+bc); O = $6a^2$ (Würfel)	
Volumen: V = abc ; V = a^3 (Würfel)	

Quader (Würfel)

Spat ABCDEFGH mit Parallelogramm ABCD als Grund-, Parallelogramm EFGH als Deckfläche.

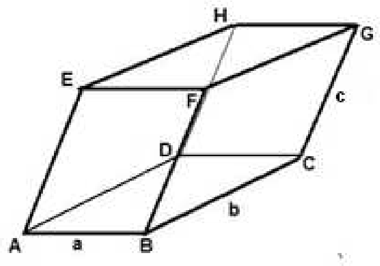
$a = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, $b = \left|\overrightarrow{AD}\right|$, $c = \left|\overrightarrow{AE}\right|$ (Kanten)

Grundfläche, Deckfläche: $G = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

Mantelfläche: $M = 2 \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}\right| + 2 \cdot \left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AE}\right|$

Oberfläche: O = 2G + M

Volumen (Spatprodukt): $V = \left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}\right|$



Spat

Dreieckpyramide ABCS mit Grundflächendreieck ABC und Spitze S.

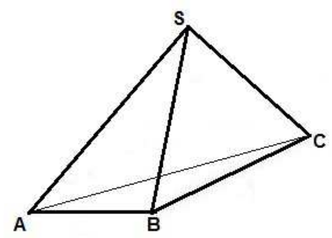
$G = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC}\right|$ (Grundfläche)

$M = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AS}\right| + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}\right|$ (Mantelfläche)

O = G + M (Oberfläche)

h = d(S, E_{ABC}) (Höhe, E_{ABC} als Grundebene, Hessesche Normalform) ->

Volumen: V = Gh/3 (Volumen) bzw. $V = \frac{\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}\right|}{6}$



Dreieckpyramide

Parallelogrammpyramide ABCDS mit Grundflächenparallelogramm ABCD und Spitze S.

Grundkanten: $a = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, $b = \left|\overrightarrow{AD}\right|$

Höhe: h = d(S, E_{ABCD}) (E_{ABCD} als Grundebene, Hessesche Normalform)

Seitenhöhen: $h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$, $h_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

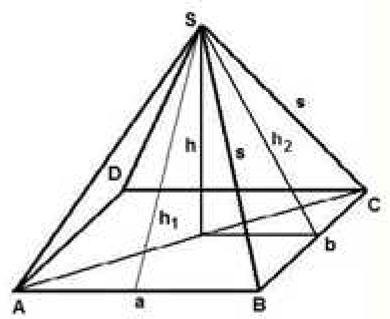
Seitenkante: $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h_2^2$

Grundfläche: $G = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

Mantelfläche: $M = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}\right| + \left|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AS}\right|$

Oberfläche: O = G + M

Volumen: V = Gh/3 bzw. $V = \frac{\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}\right|}{3}$



Parallelogrammpyramide

HNF = Hessesche Nornalform, KF = Koordinatenform, LGS = lineares Gleichungssystem, Lsg. = Lösung(en), NF = Normalenform, PF = Parameterform, u.v.L = unendlich viele Lösungen