

(Gymnasiale Oberstufe: Mathematik Grundkurs, 3-stündig)

Grundlagen

Lineare Gleichungssysteme: $\left(\begin{array}{cccc c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc c} * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & b \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} a \neq 0 & \rightarrow 1 \text{ Lsg.} \\ a = 0, b \neq 0 & \rightarrow 0 \text{ Lsg.} \\ a = 0, b = 0 & \rightarrow u.v.Lsg. \end{cases}$	
Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Punkt A(a ₁ a ₂ a ₃), Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Ortsvektor: $\vec{a} = \vec{OA}$ Länge, Betrag: $ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{1}{ \vec{a} } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$	Differenzvektor: $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ Linearkombination: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix},$ $r \vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix},$ Gegenvektor: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix},$ Mitte: $\vec{OM} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} \\ \frac{a_3 + b_3}{2} \end{pmatrix}$ Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ Kreuzprodukt, Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ Spatprodukt: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_3$

Konstruktionen

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektor \vec{u}	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor \vec{u} , Parameter t -> Gerade: g: $x = a + t u$ (PF)
Punkte A, B	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{AB}$, Parameter t -> Gerade: g: $x = \vec{OA} + t \vec{AB} = a + t u$ (PF)
Gerade $g_1: x = a_1 + s u_1$ (PF) Punkt $A \notin g_1$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = u_1$, Parameter t -> Gerade: g: $x = \vec{OA} + t u = a + t u$ (PF) als zu g_1 parallele Gerade durch den Punkt A ($g \parallel g_1$)
Geraden g: $x = a + t u$ h: $x = b + t u$ (PF)	Mitte $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ -> Mittelparallele k: $x = \vec{OM} + t u$ (PF) (k g h)
Ebene E: $x = b + r v + s w$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(x - b) = 0$ ($\vec{n} = v \times w$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Punkt A	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{n}$, Parameter t -> Gerade: g: $x = \vec{OA} + t \vec{n} = a + t n$ (PF) als zu E senkrechte Gerade durch den Punkt A ($g \perp E$)

Geradenkonstruktionen

Voraussetzung	Konstruktion
Punkt A, Richtungsvektoren \vec{v}, \vec{w}	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektoren \vec{u}, \vec{v} , Parameter r, s -> Ebene: E: $x = \vec{OA} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF)
Punkte A($a_1 a_2 a_3$), B($b_1 b_2 b_3$), C($c_1 c_2 c_3$)	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AB}, \vec{w} = \vec{AC}$, Parameter r, s -> Ebene: E: $x = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF); Lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 1 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0 0 0) \notin E$)
Gerade g: $x = a + s u$ (PF) Punkt $P \notin g$	Stützvektor $\vec{a} = \vec{OA}$, Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{AP}$, Parameter t -> Ebene: E: $x = a + s u + t v$ (PF)
Gerade g: $x = a + s u$ (PF) Punkt P	Ebene: E: $\vec{u}(x - OP) = 0$ (NF) als zur Gerade g senkrechte Ebene durch den Punkt P ($E \perp g$)
Gerade $g_1: x = a_1 + s u_1$ (PF), Gerade $g_2: x = a_2 + t u_2$ (PF), Schnittpunkt S ($g_1 \cap g_2 = \{S\}$), Punkte P($p_1 p_2 p_3$), Q($q_1 q_2 q_3$) $\in g_1$, R($r_1 r_2 r_3$) $\in g_2$	Stützvektor $\vec{b} = \vec{OS}$, Richtungs-/Spannvektoren \vec{u}_1, \vec{u}_2 , Parameter s, t -> Ebene: E: $x = b + s u_1 + t u_2$ (PF); LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Ebene: E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0 0 0) \notin E$)

<p>Gerade $g_1: \vec{x} = a_1 + s \vec{u}_1$ (PF), Gerade $g_2: \vec{x} = a_2 + t \vec{u}_2$ (PF), $g_1 \parallel g_2, g_1 \cap g_2 = \{\}$, Punkte $P(p_1 p_2 p_3), Q(q_1 q_2 q_3) \in g_1$, $R(r_1 r_2 r_3) \in g_2$</p>	<p>Stützvektor $\vec{b} = \vec{a}_1$, Richtungs-/Spannvektoren $\vec{u}, \vec{v} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$, Parameter $s, t \rightarrow$ Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + s \vec{u} + t \vec{v}$</p> <p>LGS: $\begin{pmatrix} \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = 1 \\ \alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 = 1 \end{pmatrix} \rightarrow$</p> <p>Ebene: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF, mit $O(0 0 0) \notin E$)</p>
<p>$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Punkt P, Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$</p>	<p>Ebene: $F: \vec{n}(\vec{x} - \vec{OP}) = 0$ (NF) als zur Ebene E parallele Ebene durch den Punkt P ($F \parallel E$)</p>
<p>$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF) Abstand D, Normalenvektor $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$</p>	<p>$F_1: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d - \vec{n} D, F_2: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d + \vec{n} D$ als zur Ebene E parallele Ebenen im Abstand D ($F_1 \parallel F_2 \parallel E$)</p>
<p>Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF), bzw. $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Punkte A, B</p>	<p>Normalenvektor \vec{n}, Parameter t, u \rightarrow Ebene: $F: \vec{x} = \vec{OA} + t \vec{AB} + u \vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Punkte A, B ($F \perp E$)</p>
<p>Ebene: $E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF), bzw. $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF), Gerade: $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF)</p>	<p>Normalenvektor \vec{n}, Parameter t, u \rightarrow Ebene: $F: \vec{x} = a + t \vec{u} + u \vec{n}$ als zur Ebene E senkrechte Ebene F durch die Gerade g ($F \perp E$)</p>

Ebenenkonstruktionen

$$E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{u} + s \vec{v} \text{ (PF)} \rightarrow \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} \rightarrow E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0 \text{ (NF)} \rightarrow E: \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{b} \rightarrow E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \text{ (KF)}$$

Ebene in Parameter-, Normalen-, Koordinatenform

Lagebeziehungen

Voraussetzung	Abstand
Punkte $P(p_1 p_2 p_3), Q(q_1 q_2 q_3)$	$\overline{PQ} = d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$

Abstand zwischen zwei Punkten

Voraussetzung	Abstand
Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ (KF), Punkt $P(p_1 p_2 p_3)$	Normalenvektor \vec{n} , Punkt P \rightarrow Lotgerade $h: \vec{x} = \vec{OP} + t \vec{n} \rightarrow$ Lotfußpunkt F als Schnittpunkt von Lotgerade und Ebene \rightarrow $d(P,E) = d(P,F) = \left \frac{\vec{n} \cdot \vec{PF}}{ \vec{n} } \right $
Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ (KF), Punkt $P(p_1 p_2 p_3)$	Hessesche Normalform \rightarrow $d(P,E) = \frac{ \vec{n} \cdot \vec{OP} - d }{ \vec{n} } = \frac{ n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - d }{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$

Ebene E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ (KF), Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$, $g \parallel E$	$d(g,E) = d(P,E)$ mit Peg und $\vec{OP} = \vec{a}$
Ebenen E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$ (KF), F: $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = e$ (KF), $E \parallel F$	$d(F,E) = d(P,E)$ bzw. $d(F,E) = \frac{\left \begin{array}{c c} d & e \\ \hline \vec{n} & \vec{m} \end{array} \right }{\left \vec{n} \right \cdot \left \vec{m} \right }$ mit PeF bzw. Normalenvektoren \vec{n} , \vec{m}

Abstand zwischen Punkt und Ebene, zwischen Gerade und Ebene, zwischen parallelen Ebenen

Voraussetzung	Winkel
	Kosinus-Formel ->
Winkel φ zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b}	$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left \vec{a} \right \cdot \left \vec{b} \right }$ (spitzer, stumpfer Winkel)
Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$	$\cos \varphi = \frac{\left \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right }{\left \vec{u}_1 \right \cdot \left \vec{u}_2 \right }$ (spitzer Winkel)
Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Ebenen $E_1: \vec{n}_1 \cdot \vec{x} = d_1$ (NF) und $E_2: \vec{n}_2 \cdot \vec{x} = d_2$ (NF)	$\cos \varphi = \frac{\left \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \right }{\left \vec{n}_1 \right \cdot \left \vec{n}_2 \right }$ (spitzer Winkel)

Winkel zwischen je zwei Vektoren, Geraden, Ebenen

Voraussetzung	Winkel
	Sinus-Formel ->
Schnittwinkel φ zwischen einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ und einer Ebene $E: \vec{n} \cdot \vec{x} = d$ (NF)	$\sin \varphi = \frac{\left \vec{u} \cdot \vec{n} \right }{\left \vec{u} \right \cdot \left \vec{n} \right }$ (spitzer Winkel)

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Geraden
Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$	$x_1 = 0 \rightarrow a_1 + tu_1 = 0 \rightarrow t = t_1 = -a_1/u_1 \rightarrow S_1(0 a_2+t_1u_2 a_3+t_1u_3)$ (Spurpunkt mit x_2 - x_3 -Ebene, falls $u_1 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_1 = 0$) $x_2 = 0 \rightarrow a_2 + tu_2 = 0 \rightarrow t = t_2 = -a_2/u_2 \rightarrow S_2(a_1+t_2u_1 0 a_3+t_2u_3)$ (Spurpunkt mit x_1 - x_3 -Ebene, falls $u_2 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_2 = 0$) $x_3 = 0 \rightarrow a_3 + tu_3 = 0 \rightarrow t = t_3 = -a_3/u_3 \rightarrow S_3(a_1+t_3u_1 a_2+t_3u_2 0)$ (Spurpunkt mit x_1 - x_2 -Ebene, falls $u_3 \neq 0$; kein Spurpunkt, falls $u_3 = 0$) $u_1 = 0 \rightarrow g \parallel x_2$ - x_3 -Ebene $u_2 = 0 \rightarrow g \parallel x_1$ - x_3 -Ebene $u_3 = 0 \rightarrow g \parallel x_1$ - x_2 -Ebene $u_2 = 0, u_3 = 0 \rightarrow g \parallel x_1$ -Achse $u_1 = 0, u_3 = 0 \rightarrow g \parallel x_2$ -Achse $u_1 = 0, u_2 = 0 \rightarrow g \parallel x_3$ -Achse

Spurpunkte, Lage von Geraden

Voraussetzung	Spurpunkte, Lage der Ebene
Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der x_1 -Achse) $S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der x_2 -Achse) $S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3 -Achse)
Ebene E: $bx_2 + cx_3 = d$ $b \neq 0, c \neq 0$	$S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der x_2 -Achse) $S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3 -Achse) -> Ebene parallel zur x_1 -Achse
Ebene E: $ax_1 + cx_3 = d$ $a \neq 0, c \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der x_1 -Achse) $S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3 -Achse) -> Ebene parallel zur x_2 -Achse
Ebene E: $ax_1 + bx_2 = d$ $a \neq 0, b \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der x_1 -Achse) $S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der x_2 -Achse) -> Ebene parallel zur x_3 -Achse
Ebene E: $ax_1 = d$ $a \neq 0$	$S_1(d/a 0 0)$ (Schnittpunkt mit der x_1 -Achse) -> Ebene parallel zur x_2 - und x_3 -Achse -> Ebene parallel zur x_2 - x_3 -Ebene
Ebene E: $bx_2 = d$ $b \neq 0$	$S_2(0 d/b 0)$ (Schnittpunkt mit der x_2 -Achse) -> Ebene parallel zur x_1 - und x_3 -Achse -> Ebene parallel zur x_1 - x_3 -Ebene
Ebene E: $cx_3 = d$ $c \neq 0$	$S_3(0 0 d/c)$ (Schnittpunkt mit der x_3 -Achse) -> Ebene parallel zur x_1 - und x_2 -Achse -> Ebene parallel zur x_1 - x_2 -Ebene

Spurpunkte, Lage von Ebenen

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P	Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{a} + t\vec{u}$ -> 1 Lösung: $P \in g$; keine Lösung: $P \notin g$
Gerade: $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ (PF)	

Lage Punkt – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Gerade $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + s\vec{u}_1$ (PF) Gerade $g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ (PF)	<p>a) Gleichsetzen der Geradengleichungen: $\vec{a}_1 + s\vec{u}_1 = \vec{a}_2 + t\vec{u}_2$ -> unendlich viele Lösungen: $g_1 = g_2$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$; keine Lösung: Geraden parallel oder windschief</p> <p>b) Überprüfung auf Parallelität: $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ -> 1 Lösung: $g_1 \parallel g_2$, keine Lösung: g_1, g_2 windschief</p> <p>c) Abstand (bei parallelen Geraden): $d(g_1, g_2) = d(A_2, g_1)$ mit Punkt $A_2 \in g_2$, z.B. mit $\vec{a}_2 = \vec{OA}_2$</p> <p>d) Abstand (bei windschiefen Geraden, Lotfußpunktverfahren): $P_L \in g_1, Q_L \in g_2$ mit: $P_L \vec{Q}_L \cdot \vec{u}_1 = 0, P_L \vec{Q}_L \cdot \vec{u}_2 = 0, d(g_1, g_2) = \left P_L \vec{Q}_L \right$;</p> <p>e) Abstand (bei windschiefen Geraden, Hilfeebenenverfahren): Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$, Hilfeebene $E_H: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}_1) = 0$ (NF) mit $E_H \parallel g_2, d(g_1, g_2) = d(A_2, E_H)$ mit $A_2 \in g_2$, z.B. mit $\vec{a}_2 = \vec{OA}_2$ (Hessesche Normalform); Formel: $d(g_1, g_2) = \frac{\left \vec{n} \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \right }{\left \vec{n} \right }$</p> <p>f) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Geraden): $\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{\left \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \right }{\left \vec{u}_1 \right \cdot \left \vec{u}_2 \right } \right)$</p>

Lage Gerade – Gerade

Voraussetzung	Lage, Abstand
Punkt P($p_1 p_2 p_3$) Ebene: E: $x = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)	a) Punktprobe: $\vec{OP} = \vec{b} + r\vec{u} + s\vec{v} \rightarrow 1$ Lösung: $P \in g$; keine Lösung: $P \notin g$ b) Punktprobe: $ap_1 + bp_2 + cp_3 = d \rightarrow$ wahre Aussage: $P \in g$; falsche Aussage: $P \notin g$ c) Abstand (Hessesche Normalform): $d(P,E) = \frac{ \vec{n} \cdot \vec{OP} - d }{ \vec{n} } = \frac{ ap_1 + bp_2 + cp_3 - d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Lage Punkt – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
Ebene E: $x = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(x - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF) Gerade: g: $x = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF)	a) Gleichsetzen von Ebenen- und Geradengleichung: $\vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w} = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) bzw. Einsetzen der Geradenkomponenten x_1, x_2, x_3 in die Ebene (KF, NF) \rightarrow unendlich viele Lösungen: $g \subset E$, 1 Lösung: Schnittpunkt S mit $g \cap E = \{S\}$; keine Lösung: $g \parallel E$ b) Abstand (bei Parallelität von Gerade und Ebene): $d(g,E) = d(A,E)$ mit Punkt $A \in g$, z.B. mit $\vec{a} = \vec{OA}$ (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidender Gerade und Ebene): $\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{ \vec{n} \cdot \vec{u} }{ \vec{n} \cdot \vec{u} } \right)$

Lage Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage, Abstand
E ₁ : $x = \vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1$ (PF) bzw. E ₁ : $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), E ₂ : $x = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2$ (PF) bzw. E ₂ : $ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = \vec{v}_1 \times \vec{w}_1$, $\vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2$	a) Gleichsetzen der Ebenengleichungen E ₁ , E ₂ (PF): $\vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1 = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2$ bzw. Einsetzen der Ebenenkomponenten x_1, x_2, x_3 der Ebene E ₁ (PF) in die Ebene E ₂ (KF) bzw. Lösen des linearen Gleichungssystems der Ebenen E ₁ , E ₂ (KF): $\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix} \rightarrow$ unendlich viele Lösungen (mit zwei Parametern): $E_1 = E_2$, unendlich viele Lösungen (mit einem Parameter): Schnittgerade g mit $E_1 \cap E_2 = g$; keine Lösung: $E_1 \parallel E_2$ b) Abstand (bei Parallelität der Ebenen): $d(E_1, E_2) = d(A, E_1)$ mit Punkt $A \in E_2$ (Hessesche Normalform) c) Schnittwinkel (bei sich schneidenden Ebenen): $\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } \right)$

Lage Ebene – Ebene

Voraussetzung	Lage
Gerade: g: $x = \vec{a} + t \vec{u}$ (PF) Ebene E: $x = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF) bzw. E: $\vec{n}(x - \vec{b}) = 0$ ($\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$) (NF) bzw. E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ($\vec{n} = (a \ b \ c)^T$) (KF)	a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow g \parallel E$ b) $\vec{u} = k \vec{n} \rightarrow g \perp E$

Orthogonalität, Parallelität Gerade – Ebene

Voraussetzung	Lage
$\vec{x} = b_1 + r v_1 + s w_1$ (PF) bzw. $E_1: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1$ (KF), $\vec{x} = b_2 + t v_2 + u w_2$ (PF) bzw. $E_2: ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$ (KF) $\vec{n}_1 = v_1 \times w_1, \vec{n}_2 = v_2 \times w_2$	a) $\vec{n}_1 = k \vec{n}_2 \rightarrow E_1 \parallel E_2$ b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \rightarrow E_1 \perp E_2$

Orthogonalität, Parallelität Ebene – Ebene

Spiegelungen

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, Ursprung $O(0 0 0) \rightarrow$	Bildpunkt $A'(-a_1 -a_2 -a_3)$
Gerade $g: \vec{x} = a + t u$ (PF), Ursprung $O(0 0 0) \rightarrow$	Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(-a_1 -a_2 -a_3) \rightarrow$ gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}$ (PF) mit $g' \parallel g$
Ebene: $E: \vec{n}(\vec{x} - \vec{a}) = 0$ (NF), Ursprung $O(0 0 0) \rightarrow$	Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(-a_1 -a_2 -a_3) \rightarrow$ gespiegelte Ebene: $E': \vec{n}(\vec{x} - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$

Spiegelungen am Ursprung

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_1 -Achse \rightarrow Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_2 -Achse \rightarrow Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_3 -Achse \rightarrow	Bildpunkt $A': A'(a_1 -a_2 -a_3)$ Bildpunkt $A': A'(-a_1 a_2 -a_3)$ Bildpunkt $A': A'(-a_1 -a_2 a_3)$
Gerade $g: \vec{x} = a + t u$ (PF), $A(a_1 a_2 a_3) \in g, B(b_1 b_2 b_3) \in g \rightarrow$ x_1 -Achse x_2 -Achse x_3 -Achse	Bildpunkte $A', B': A'(a_1 -a_2 -a_3), B'(b_1 -b_2 -b_3)$ Bildpunkte $A', B': A'(-a_1 a_2 -a_3), B'(-b_1 b_2 -b_3)$ Bildpunkte $A', B': A'(-a_1 -a_2 a_3), B'(-b_1 -b_2 b_3)$ \rightarrow Bildgerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{A'B}'$
Ebene: $E: \vec{x} = a + r v + s w$ (PF), $A(a_1 a_2 a_3) \in E, B(b_1 b_2 b_3) \in E,$ $C(c_1 c_2 c_3) \in E \rightarrow$ x_1 -Achse x_2 -Achse x_3 -Achse	Bildpunkte $A', B', C': A'(a_1 -a_2 -a_3), B'(b_1 -b_2 -b_3), C'(c_1 -c_2 -c_3)$ Bildpunkte $A', B', C': A'(-a_1 a_2 -a_3), B'(-b_1 b_2 -b_3), C'(-c_1 c_2 -c_3)$ Bildpunkte $A', B', C': A'(-a_1 -a_2 a_3), B'(-b_1 -b_2 b_3), C'(-c_1 -c_2 c_3)$ \rightarrow Bildebene: $E': \vec{x} = \vec{OA}' + r \vec{A'B}' + s \vec{A'C}'$

Spiegelungen an Koordinatenachsen

Voraussetzung	Spiegelung
Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_1 - x_2 -Ebene \rightarrow Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_1 - x_3 -Ebene \rightarrow Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, x_2 - x_3 -Ebene \rightarrow	Bildpunkt $A': A'(a_1 a_2 -a_3)$ Bildpunkt $A': A'(a_1 -a_2 a_3)$ Bildpunkt $A': A'(-a_1 a_2 a_3)$
Gerade $g: \vec{x} = a + t u$ (PF), $A(a_1 a_2 a_3) \in g, B(b_1 b_2 b_3) \in g \rightarrow$ x_1 - x_2 -Ebene x_1 - x_3 -Ebene x_2 - x_3 -Ebene	Bildpunkte $A', B': A'(a_1 a_2 -a_3), B'(b_1 b_2 -b_3)$ Bildpunkte $A', B': A'(a_1 -a_2 a_3), B'(b_1 -b_2 b_3)$ Bildpunkte $A', B': A'(-a_1 a_2 a_3), B'(-b_1 b_2 b_3)$ \rightarrow Bildgerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{A'B}'$

<p>Ebene: $E: \vec{x} = a + r \vec{v} + s \vec{w}$ (PF), $A(a_1 a_2 a_3) \in E$, $B(b_1 b_2 b_3) \in E$, $C(c_1 c_2 c_3) \in E \rightarrow$ x_1-x_2-Ebene x_1-x_3-Ebene x_2-x_3-Ebene</p>	<p>Bildpunkte A', B', C': $A'(a_1 a_2 -a_3)$, $B'(b_1 b_2 -b_3)$, $C'(c_1 c_2 -c_3)$ Bildpunkte A', B', C': $A'(a_1 -a_2 a_3)$, $B'(b_1 -b_2 b_3)$, $C'(c_1 -c_2 c_3)$ Bildpunkte A', B', C': $A'(-a_1 a_2 a_3)$, $B'(-b_1 b_2 b_3)$, $C'(-c_1 c_2 c_3)$ \rightarrow Bildebene: $E': \vec{x} = \vec{OA}' + r \vec{A'B}' + s \vec{A'C}'$</p>
--	--

Spiegelungen an Koordinatenebenen

Voraussetzung	Spiegelung
<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Bildpunkt $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = \vec{OF} + \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = 2\vec{OF} - \vec{OA}$ \rightarrow Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3)$</p>
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3) \rightarrow$ gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}$ (PF) mit $g' \parallel g$</p>
<p>Ebene: $E: \vec{n}(x - a) = 0$ (NF), Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3) \rightarrow$ gespiegelte Ebene: $E': \vec{n}(x - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$</p>

Punktspiegelungen

Voraussetzung	Spiegelung
<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Bildpunkt $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = \vec{OF} + \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = 2\vec{OF} - \vec{OA}$ \rightarrow Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3)$</p>
<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$, Spiegelebene $E_S: \vec{n}_S \cdot x = d_S$ (KF)</p>	<p>Lotfußpunkt $F \in E_S$ mit Hilfsgerade: $h: \vec{x} = \vec{OA} + t \vec{n}_S$ (PF), $E_S \cap h = \{F\}$ (Hilfsgeradenverfahren) \rightarrow Bildpunkt $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = \vec{OF} + \vec{AF}$ bzw. $\vec{OA}' = 2\vec{OF} - \vec{OA}$ \rightarrow Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3)$</p>

Spiegelung von Punkten

Voraussetzung	Spiegelung
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3) \rightarrow$ gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}$ (PF) mit $g' \parallel g$</p>
<p>Gerade $g: \vec{x} = a + t \vec{u}$ (PF), Spiegelebene $E_S: \vec{n}_S \cdot x = d_S$ (KF), $g \parallel E_S$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Lotfußpunkt $F \in E_S \rightarrow$ Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3) \rightarrow$ gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{u}$ (PF) mit $g' \parallel g$</p>

Spiegelung von Geraden

Voraussetzung	Spiegelung
<p>Ebene: $E: \vec{n}(x - a) = 0$ (NF), Spiegelpunkt $F(f_1 f_2 f_3)$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3) \rightarrow$ gespiegelte Ebene: $E': \vec{n}(x - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$</p>
<p>Ebene: $E: \vec{n}(x - a) = 0$ (NF), Spiegelgerade $g_S: \vec{x} = \vec{a}_S + t \vec{u}_S$ (PF), $E \parallel g_S$</p>	<p>Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Punkt $F \in g_S \rightarrow$ Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3) \rightarrow$ gespiegelte Ebene: $E': \vec{n}(x - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$</p>

Ebene: $E: \vec{n} \cdot (x - a) = 0$ (NF), Spiegelebene $E_S: \vec{n}_S \cdot x = d_S$ (KF), $E \parallel E_S$	Punkt $A(a_1 a_2 a_3)$ mit $\vec{OA} = \vec{a}$, Lotfußpunkt $F \in E_S \rightarrow$ Bildpunkt $A'(2f_1 - a_1 2f_2 - a_2 2f_3 - a_3) \rightarrow$ gespiegelte Ebene: $E': \vec{n} \cdot (x - \vec{OA}') = 0$ (NF) mit $E' \parallel E$
---	---

Spiegelungen von Ebenen

Geometrie

Dreieck ABC in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF), Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$, Winkel an den Ecken A, B, C: α, β, γ .	
$\vec{AB} \neq k \vec{AC}$ für jedes reelle $k \Rightarrow$ Dreieck $\vec{AB} \neq k \vec{BC}$ für jedes reelle $k \Rightarrow$ Dreieck $\vec{BC} \neq k \vec{AC}$ für jedes reelle $k \Rightarrow$ Dreieck	
Seiten: $c = \vec{AB} , b = \vec{AC} , a = \vec{BC} $, Umfang: $u = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} $	
$ \vec{AB} = \vec{AC} \Rightarrow$ Dreieck gleichschenkelig (Spitzenwinkel α) $ \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Dreieck gleichschenkelig (Spitzenwinkel β) $ \vec{BC} = \vec{AC} \Rightarrow$ Dreieck gleichschenkelig (Spitzenwinkel γ)	
Winkel: $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{AC} }, \cos \beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{BC} }, \cos \gamma = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AC} \cdot \vec{BC} }$	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel α) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel β) $\vec{BC} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig (rechter Winkel γ)	
Höhen: $h_a = d(A, g_{BC}), h_b = d(B, g_{AC}), h_c = d(C, g_{AB})$ bzw. $h_a = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AC} }{ \vec{BC} }, h_b = \frac{ \vec{AB} \times \vec{BC} }{ \vec{AC} }, h_c = \frac{ \vec{AC} \times \vec{BC} }{ \vec{AB} }$ usw.	
Fläche: $A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ bzw. $A = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{BC} = \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{BC} $	

Dreieck

Trapez ABCD in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	
$\vec{AB} = k \vec{CD}$ für ein gewisses $k \Rightarrow$ Trapez ($\vec{AB} \parallel \vec{CD}$) $\vec{BC} = k \vec{AD}$ für ein gewisses $k \Rightarrow$ Trapez ($\vec{BC} \parallel \vec{AD}$)	
Seiten: $a = \vec{AB} , b = \vec{BC} , c = \vec{CD} , d = \vec{AD} $,	

Umfang: $u = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{AD} $	
$\vec{AB} \parallel \vec{CD}, \vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow$ Trapez gleichschenkelig $\vec{BC} \parallel \vec{AD}, \vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow$ Trapez gleichschenkelig	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \vec{AD} }, \cos\beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \vec{BC} }, \cos\gamma = -\frac{\vec{BC} \cdot \vec{CD}}{ \vec{BC} \vec{CD} }, \cos\delta = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{CD}}{ \vec{AD} \vec{CD} }$	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$
Höhe: $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Rightarrow h = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AC} }{ \vec{AB} }$, bzw. $\vec{BC} \parallel \vec{AD} \Rightarrow h = \frac{ \vec{BC} \times \vec{BD} }{ \vec{BC} }$	
Fläche: $\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Rightarrow A = \frac{a+c}{2} h$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AC} + \vec{AC} \times \vec{AD} $ bzw.: $\vec{BC} \parallel \vec{AD} \Rightarrow A = \frac{b+d}{2} h$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AC} + \vec{AC} \times \vec{AD} $	

Trapez

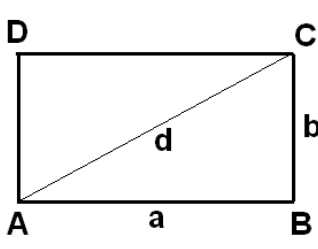
Parallelogramm ABCD in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	
$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow$ Parallelogramm $\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow$ Parallelogramm	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{CD} , b = \vec{BC} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 2 \vec{AB} + 2 \vec{BC} $	
Winkel: $\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \vec{AD} }, \cos\beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \vec{BC} }$ usw.	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ $\alpha + \beta = 180^\circ, \gamma + \delta = 180^\circ$ $\alpha = \gamma, \beta = \delta$
Höhen: $h_a = d(C, g_{AB})$ bzw. $h_a = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AB} }$, $h_b = d(C, g_{AD})$ bzw. $h_b = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AD} }$	
Fläche: $A = ah_a = bh_b$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $	

Parallelogramm

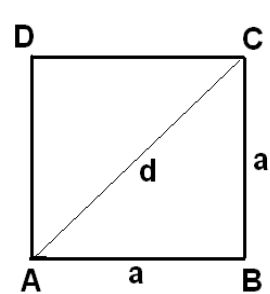
Raute ABCD als Parallelogramm mit gleich langen Seiten in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AC}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AD}$, Winkel an den Ecken A, B, C, D: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	
$\vec{AB} = \vec{DC}, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Raute $\vec{BC} = \vec{AD}, \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Raute	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 4 \vec{AB} $	

Winkel: $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{ \vec{AB} \cdot \vec{AD} }$, $\cos \beta = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{ \vec{AB} \cdot \vec{BC} }$ usw.	Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ $\alpha + \beta = 180^\circ, \gamma + \delta = 180^\circ$ $\alpha = \gamma, \beta = \delta$
Höhe: $h = \frac{ \vec{AB} \times \vec{AD} }{ \vec{AB} }$	
Fläche: $A = \frac{ \vec{AC} \cdot \vec{BD} }{2}$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $	

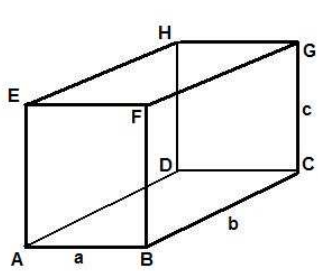
Raute

Rechteck ABCD als rechtwinkliges Parallelogramm in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AD}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , \vec{AD} , Winkel an den Ecken A, B, C, D: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow$ Rechteck $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow$ Rechteck	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{CD} $, $b = \vec{BC} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 2 \vec{AB} + 2 \vec{BC} $	
Fläche: $A = \vec{AB} \cdot \vec{BC} $ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $	

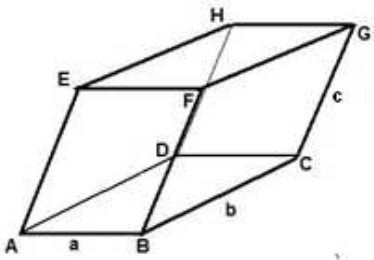
Rechteck

Quadrat ABCD als rechtwinkliges Parallelogramm mit gleich langen Seiten in der Ebene: $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \vec{AB} + s \vec{AD}$ (PF) mit $D \in E$, Seiten als Differenzvektoren: \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , \vec{AD} , Winkel an den Ecken A, B, C, D: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.	
$\vec{AB} = \vec{DC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, $ \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Quadrat $\vec{BC} = \vec{AD}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$, $ \vec{AB} = \vec{BC} \Rightarrow$ Quadrat	
Seiten: $a = \vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{AD} $, Umfang: $u = 4 \vec{AB} $	
Fläche: $A = \vec{AB} ^2$ bzw. $A = \vec{AB} \times \vec{AD} $	

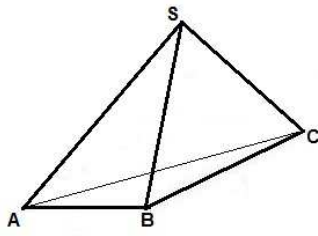
Quadrat

Quader (Würfel) ABCDEFGH mit Rechteck ABCD als Grund-, Rechteck EFGH als Deckfläche und rechten Winkeln.	
$a = \vec{AB} $, $b = \vec{AD} $, $c = \vec{AE} $ (Kanten); $a=b=c$ (Würfel)	
Grundfläche, Deckfläche: $G = ab$; $G = a^2$ (Würfel) Mantelfläche: $M = (2a+2b)c$; $M = 4a^2$ (Würfel) Oberfläche: $O = 2G + M = 2(ab+ac+bc)$; $O = 6a^2$ (Würfel)	
Volumen: $V = abc$; $V = a^3$ (Würfel)	

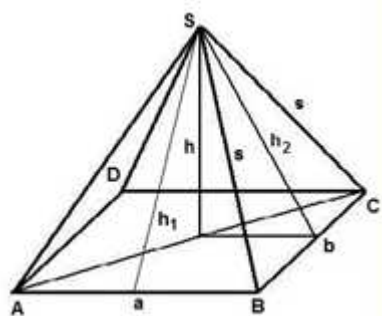
Quader (Würfel)

Spat ABCDEFGH mit Parallelogramm ABCD als Grund-, Parallelogramm EFGH als Deckfläche.	
$a = \vec{AB} , b = \vec{AD} , c = \vec{AE} $ (Kanten)	
Grundfläche, Deckfläche: $G = \vec{AB} \times \vec{AD} $	
Mantelfläche: $M = 2 \cdot \vec{AB} \times \vec{AE} + 2 \cdot \vec{AD} \times \vec{AE} $	
Oberfläche: $O = 2G + M$	
Volumen (Spatprodukt): $V = (\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AE} $	

Spat

Dreieckspyramide ABCS mit Grundflächendreieck ABC und Spitze S.	
$G = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{BC} = \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{BC} $ (Grundfläche)	
$M = \frac{1}{2} \vec{AB} \times \vec{AS} + \frac{1}{2} \vec{AC} \times \vec{AS} + \frac{1}{2} \vec{BC} \times \vec{BS} $ (Mantelfläche)	
$O = G + M$ (Oberfläche)	
$h = d(S, E_{ABC})$ (Höhe, E_{ABC} als Grundebene, Hessesche Normalform) ->	
Volumen: $V = Gh/3$ (Volumen) bzw. $V = \frac{ (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AS} }{6}$	

Dreieckspyramide

Parallelogrammpyramide ABCDS mit Grundflächenparallelogramm ABCD und Spitze S.	
Grundkanten: $a = \vec{AB} , b = \vec{AD} $	
Höhe: $h = d(S, E_{ABCD})$ (E_{ABCD} als Grundebene, Hessesche Normalform)	
Seitenhöhen: $h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2, h_2^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$	
Seitenkante: $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_1^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h_2^2$	
Grundfläche: $G = \vec{AB} \times \vec{AD} $	
Mantelfläche: $M = \vec{AB} \times \vec{AS} + \vec{AD} \times \vec{AS} $	
Oberfläche: $O = G + M$	
Volumen: $V = Gh/3$ bzw. $V = \frac{ (\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AS} }{3}$	

Parallelogrammpyramide

HNF = Hessesche Normalform, KF = Koordinatenform, LGS = lineares Gleichungssystem, Lsg. = Lösung(en), NF = Normalenform, PF = Parameterform, u.v.L = unendlich viele Lösungen