Michael Buhlmann

Mathematik > Vektorrechnung > kompakt

<u>Lineare Gleichungssysteme</u>: $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{mn} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ -> $\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & b \end{array}\right)$ -> $\begin{cases} a \neq 0 & -> 1Lsg. \\ a = 0, b \neq 0 -> 0Lsg. & \\ a = 0, b = 0 -> u.v.L. & \end{cases}$

<u>Vektoren</u> (Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$,…): $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, <u>Betrag</u>: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, <u>Einheitsvektor</u>: $\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit:

$\left|\vec{a}^{\,0}\right| = 1$, $\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}^{\,2}$; <u>Nullvektor</u>: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; <u>Gegenvektor</u>: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ usw.

$A(a_1|a_2|a_3)$, $B(b_1|b_2|b_3)$, $O(0|0|0)$ -> <u>Ortsvektor</u>: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$; <u>Differenzvektor</u>: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

<u>Skalarprodukt</u>: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\alpha = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

<u>Kreuzprodukt</u>: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

<u>Linearkombinationen</u>: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$, $r\,\vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = r\,\vec{a} + s\,\vec{b} + t\,\vec{c}$ u.ä.

<u>Geraden</u>: g: $\vec{x} = \vec{a} + t\,\vec{u}$ (Stütz-, Richtungsvektor);

A, B -> g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}$ (PF)

<u>Geradenschar</u>: g_λ: $\vec{x} = \vec{a}(\lambda) + t\,\vec{u}(\lambda)$ ($\vec{a}(\lambda) = \vec{a}$:

Geradenbüschel, $\vec{u}(\lambda) = \vec{u}$: parallele Geraden)

<u>Lineare Un-/Abhängigkeit</u>: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ->

$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \end{array}\right)$ -> $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right)$ -> $\begin{cases} a \neq 0 \Rightarrow l.u. \\ \\ a = 0 \Rightarrow l.a. \end{cases}$

<u>Gerade -> Ebene</u> (g: $\vec{x} = \vec{a} + r\,\vec{u}$, h: $\vec{x} = \vec{b} + s\,\vec{v}$):

g, P∉g oder g || h, P∈h -> E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\vec{u} + s\,\overrightarrow{AP}$,

$P(p_1|p_2|p_3)$; g ∩ h = {S} -> E: $\vec{x} = \overrightarrow{OS} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$

<u>Ebenen</u>: E: $\vec{x} = \vec{b} + r\,\vec{u} + s\,\vec{v}$ (Stütz-, Richtungsv.)

A, B, C -> E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ (PF)

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (KF)

A, B, C -> $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{array}\right)$ -> E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$

E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ -> E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ -> E: $\vec{n}(\vec{x} - \vec{b}) = 0$, E: $\vec{n}\,\vec{x} = \vec{n}\,\vec{b}$ (NF)

E: $\vec{n}^{\,0}\,(\vec{x} - \vec{b}) = 0$ (HNF)

<u>Ebenenschar</u>: E_λ: $a(\lambda)x_1 + b(\lambda)x_2 + c(\lambda)x_3 = d(\lambda)$

<u>Vektorzüge</u>: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ l.u.

I. 2-dimensional: Vektorzug $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ->

$(\alpha_1 r + \beta_1 s + \gamma_1)\,\vec{a} + (\alpha_2 r + \beta_2 s + \gamma_2)\,\vec{b} = \vec{0}$ ->

$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & \beta_1 & -\gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & -\gamma_2 \end{array}\right)$ -> r, s -> Teilverhältnis

II. 3-dimensional: analog -> r, s, t -> Teilverhältnis

<u>Teilverhältnis</u>: $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{PB} = \frac{t}{t+1}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{t+1}\overrightarrow{AB}$

<u>Beweise mit Skalarprodukt</u>: $\vec{a} \perp \vec{b}$ ⇔ $\vec{a}\,\vec{b} = 0$;

$\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}^{\,2}$; $\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} \pm 2\,\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$, Voraussetzungen, Behauptung -> Beweis über Skalarprodukt, Vektorbeträge <- Vektorquadrate, Cosinuswerte: $\cos 0° = 1$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos 90° = 0$

<u>Spurpunkte</u>: I. Gerade: x_1-x_2-Ebene: $\overrightarrow{OS_3} = \vec{a} + t_3\,\vec{u}$ mit $a_3 + t_3u_3 = 0$; x_1-x_3-Ebene: $\overrightarrow{OS_2} = \vec{a} + t_2\,\vec{u}$ mit $a_2 + t_2u_2 = 0$; x_2-x_3-Ebene: $\overrightarrow{OS_1} = \vec{a} + t_1\,\vec{u}$ mit $a_1 + t_1u_1 = 0$

II. Ebene ($E: ax_1+bx_2+cx_3=d$): x_1-Achse: $S_1(d/a|0|0)$; x_2-Achse: $S_2(0|d/b|0)$; x_3-Achse: $S_2(0|0|d/c)$

<u>Lage</u>: I. Punktprobe: g, P -> $\vec{OP}=\vec{a}+t\,\vec{u}$ -> 0 Lsg., 1 Lsg. -> $P\notin g$, $P\in g$;

E (PF), P -> $\vec{OP}=\vec{b}+r\vec{u}+s\vec{v}$ oder: E (KF), P -> $ap_1+bp_2+cp_3=d$ -> 0 Lsg., 1 Lsg. -> $P\notin E$, $P\in E$

II. 2 Geraden (Gleichsetzen PF): g ∩ h = {} (0 Lsg.) -> g||h ($\vec{u}=k\vec{v}$) oder windschief (sonst);
g ∩ h = {S} (1 Lsg.) -> Schnittpunkt S; g ∩ h = g (u.v.L.) -> g = h

III. Gerade, Ebene (Gleichsetzen PF, Einsetzen PF in KF): g ∩ E = {} (0 Lsg.) -> g||E;
g ∩ E = {S} (1 Lsg.) -> Schnittpunkt S; g ∩ E = g (u.v.L.) -> g auf E ($g\subset E$);
g: $\vec{x}=\vec{a}+t\,\vec{u}$, E: $\vec{n}(\vec{x}-\vec{b})=0$ -> $\vec{n}=k\,\vec{u}$ -> $g\perp E$, $\vec{n}\,\vec{u}=0$ -> g||E

IV. 2 Ebenen (Gleichsetzen PF, Einsetzen PF in KF, LGS KF): E ∩ F = {} (0 Lsg.) -> E||F;
E ∩ F = g (u.v.L, 1 Parameter) -> Schnittgerade g; E ∩ F = E (u.v.L., 2 Parameter) -> E = F;
E: $\vec{n}_1(\vec{x}-\vec{b}_1)=0$, F: $\vec{n}_2(\vec{x}-\vec{b}_2)=0$ -> $\vec{n}_1=k\,\vec{n}_2$ -> E||F; $\vec{n}_1\,\vec{n}_2=0$ -> $E\perp F$

V. Gleichsetzen PF: g = h, g = E (PF), E (PF) = F (PF)

VI. Einsetzen PF in KF: g -> $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, $x_3=x_3(t)$ -> E (KF) -> $ax_1(t)+bx_2(t)+cx_3(t)=d$ -> t
E (PF) -> $x_1=x_1(r,s)$, $x_2=x_2(r,s)$, $x_3=x_3(r,s)$ -> F (KF) -> $ax_1(r,s)+bx_2(r,s)+cx_3(r,s)=d$ -> r = r(s)

VII: LGS KF: E (KF), F (KF) -> $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right)$ -> $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$ -> $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, $x_3=t$

<u>Abstände</u>: I. Punkt-Punkt: A, B -> d(A,B) = $\overline{AB}=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

II. Punkt-Gerade: g, P -> d(P,g) = d(P,F) = $\left|\vec{PF}\right|$ mit: E_H: $\vec{u}\,\vec{x}=\vec{u}\,\vec{OP}$, $g\cap E_H=\{F\}$ oder d(P,g) = $\left|\vec{u}\times\left(\vec{OP}-\vec{a}\right)\right|/\left|\vec{u}\right|$

III. Gerade-Gerade: g||h, $P\in h$ -> d(g,h) = d(P,g) (II.); g, h windschief -> $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ -> d(g,h) = $\left|\vec{n}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\right|/\left|\vec{n}\right|$

IV. Punkt-Ebene: d(P,E) = $\left|\vec{n}\cdot\vec{OP}-d\right|/\left|\vec{n}\right| = \left|ap_1+bp_2+cp_3-d\right|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

V. Gerade-Ebene: g||E, $P\in g$ -> d(g,E) = d(P,E) (IV.)

VI. Ebene-Ebene: E||F, $P\in F$ -> d(E,F) = d(P,E) (IV.) oder d(E,F) = $\left|\vec{n}_1\cdot\vec{b}_2-d_1\right|/\left|\vec{n}_1\right|$

<u>Winkel</u>: I. Gerade-Gerade: φ = $\cos^{-1}\left(\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|/\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\right)$

II. Gerade-Ebene: φ = $\sin^{-1}\left(\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|/\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\right)$

III. Ebene-Ebene: φ = $\cos^{-1}\left(\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|/\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|\right)$

<u>Spiegelungen</u> (um P, g, E): A -> Lotpunkt P -> $\vec{OA'}=\vec{OA}+2\cdot\vec{AP}$ -> Spiegelpunkt A‘
Spiegelungen: 2, 3 Spiegelpunkte -> g‘, E‘

<u>Projektionen</u> (auf g, E): A -> Lotpunkt P als Projektionspunkt; auf x_1-x_2-Ebene: $P(a_1|a_2|0)$; auf x_1-x_3-Ebene: $P(a_1|0|a_3)$; auf x_2-x_3-Ebene: $P(0|a_2|a_3)$
Projektionen: 2, 3 Projektionspunkte -> g_P, E_P

<u>Figuren</u> (g_{AB} = Gerade durch A, B u.ä.): I. Dreieck ΔABC: g = $\left|\vec{AB}\right|$, h = d(C,g_{AB}), A = $gh/2$; II. Parallelogramm ABCD: $\vec{AB}=\vec{DC}$, g = $\left|\vec{AB}\right|$, h = d(D, g_{AB}), A = gh; III. Raute ABCD: zusätzl. $\left|\vec{AB}\right|=\left|\vec{BC}\right|$;
IV. Trapez ABCD: $\vec{AB}\parallel\vec{CD}$, a = $\left|\vec{AB}\right|$, c = $\left|\vec{CD}\right|$, h = d(C,g_{AB}), A = $\frac{a+c}{2}h$; <u>Trigonometrie</u>

<u>Körper</u> (E_G = Ebene der Grundfläche G u.ä., $S(s_1|s_2|s_3)$ Körperspitze): I. Prisma: G, h = d(P,E_G), V = Gh;
II. Dreieckspyramide: g, h_G = d(C,g_{AB}) -> G, h = d(S, E_G) -> V = $Gh/3$; III. Viereckige Pyramide: G, h = d(S, E_G) -> V = $Gh/3$; IV. Kegel: r als Kegelradius, G = πr^2, h = d(S, E_G) -> V = $Gh/3$

HNF = Hessische Normalenform, KF = Koordinatenform, LGS = lineares Gleichungssystem, Lsg. = Lösung(en), NF = Normalenform, PF = Parameterform, u.v.L = unendlich viele Lösungen