

# Mathematik-Formelsammlung

## > Vektorrechnung

## > Punkte, Geraden, Ebenen

## > Lagebeziehungen

---

Punkte  $P(p_1|p_2|p_3)$  lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum  $\mathbf{R}^3$  identifizieren mit Ortsvektoren  $\vec{OP}$  (mit:  $O(0|0|0)$  als Koordinatenursprung), Linearkombinationen von Vektoren sind

Geraden  $g: x = a + t u$ ,  $g_1: x = a_1 + s u_1$ ,  $g_2: x = a_2 + t u_2$  und Ebenen  $E: x = b + r v + s w$  (mit Stützvektoren, Richtungs- und Spannvektoren sowie den reellen Parametern). Geraden liegen nur in Parameterform vor, bei den Ebenen ergeben sich die Formen:

- $E: x = b + r v + s w$  (Parameterform)
- $E: n \begin{pmatrix} - \\ x - p \end{pmatrix} = 0$  (Normalenform)
- $E: n^0 \begin{pmatrix} - \\ x - p \end{pmatrix} = 0$  (Hesse'sche Normalenform)
- $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$  (Koordinatenform)

(unter Beachtung des Skalar- und Kreuzprodukts zwischen den Vektoren).

Es gelten dann die Lagebeziehungen hinsichtlich

- der Schnittmengen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen (leer, Schnittpunkt, Schnittgerade)
- des Schnittwinkels zwischen Geraden und Ebenen
- des Abstands zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

### Lage zwischen zwei Punkten

Punkte: P, Q verschieden

Abstand:

$$\overline{PQ} = \left| \vec{PQ} \right| = d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

$P(p_1|p_2|p_3), Q(q_1|q_2|q_3)$

### Lage zwischen zwei Punkten

### Lage zwischen Punkt und Gerade

{P} ∩ g: Punktprobe (Gleichsetzen):

$$\vec{OP} = \vec{a} + t \vec{u}$$

LGS

keine Lösung:  
Punkt **liegt nicht** auf der Geraden.

$$P \notin g$$

eine Lösung:  
Punkt **liegt auf** der Geraden.

$$P \in g$$

Abstand:

Lotpunkt  $P_L \in g$  mit:  $\vec{P_L P} \cdot \vec{u} = 0$

$$d(P, g) = d(P, P_L)$$

oder:

$$d(P, g) = \frac{\left| \vec{u} \times \left( \vec{OP} - \vec{a} \right) \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \frac{\left| \vec{u} \times \vec{AP} \right|}{\left| \vec{u} \right|}$$

(Abstand:

$$d(P, g) = 0)$$

$P(p_1|p_2|p_3), g: \vec{x} = \vec{a} + t \vec{u}, \vec{a} = \vec{OA}$

### Lage zwischen Punkt und Gerade

## Lage zwischen Punkt und Ebene

$\{P\} \cap E$   
 Punktprobe (Gleichsetzen, Einsetzen):  
 $\vec{OP} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$  oder  $ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$   
 LGS oder Gleichung

keine Lösung:  
 Punkt **liegt nicht** auf der Ebene.  
 $P \notin E$

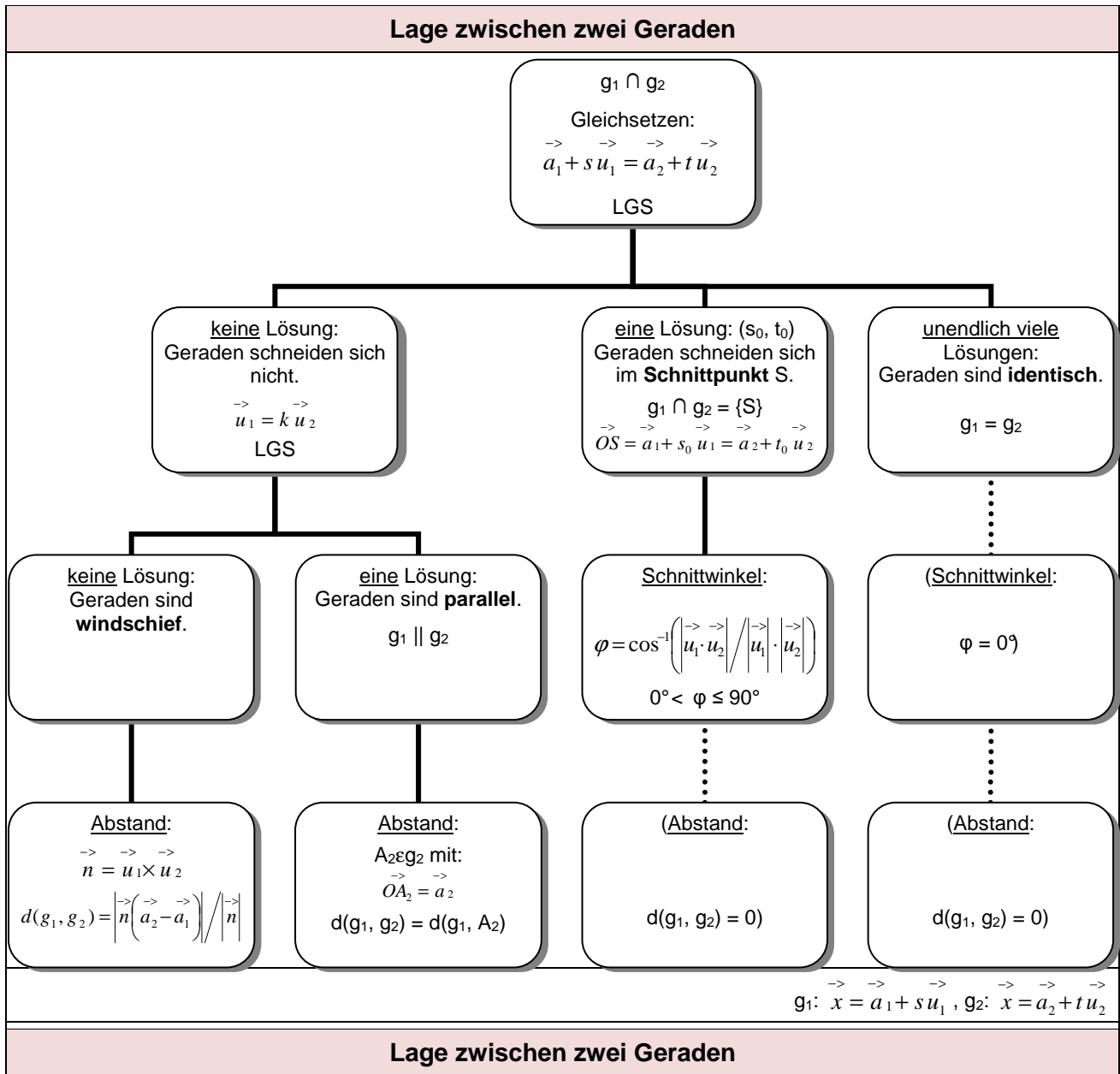
eine Lösung:  
 Punkt **liegt auf** der Ebene.  
 $P \in E$

Abstand:  
 $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}, d = \vec{n} \cdot \vec{b}$   
 $d(P, E) = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{OP} - d}{|\vec{n}|} \right|$

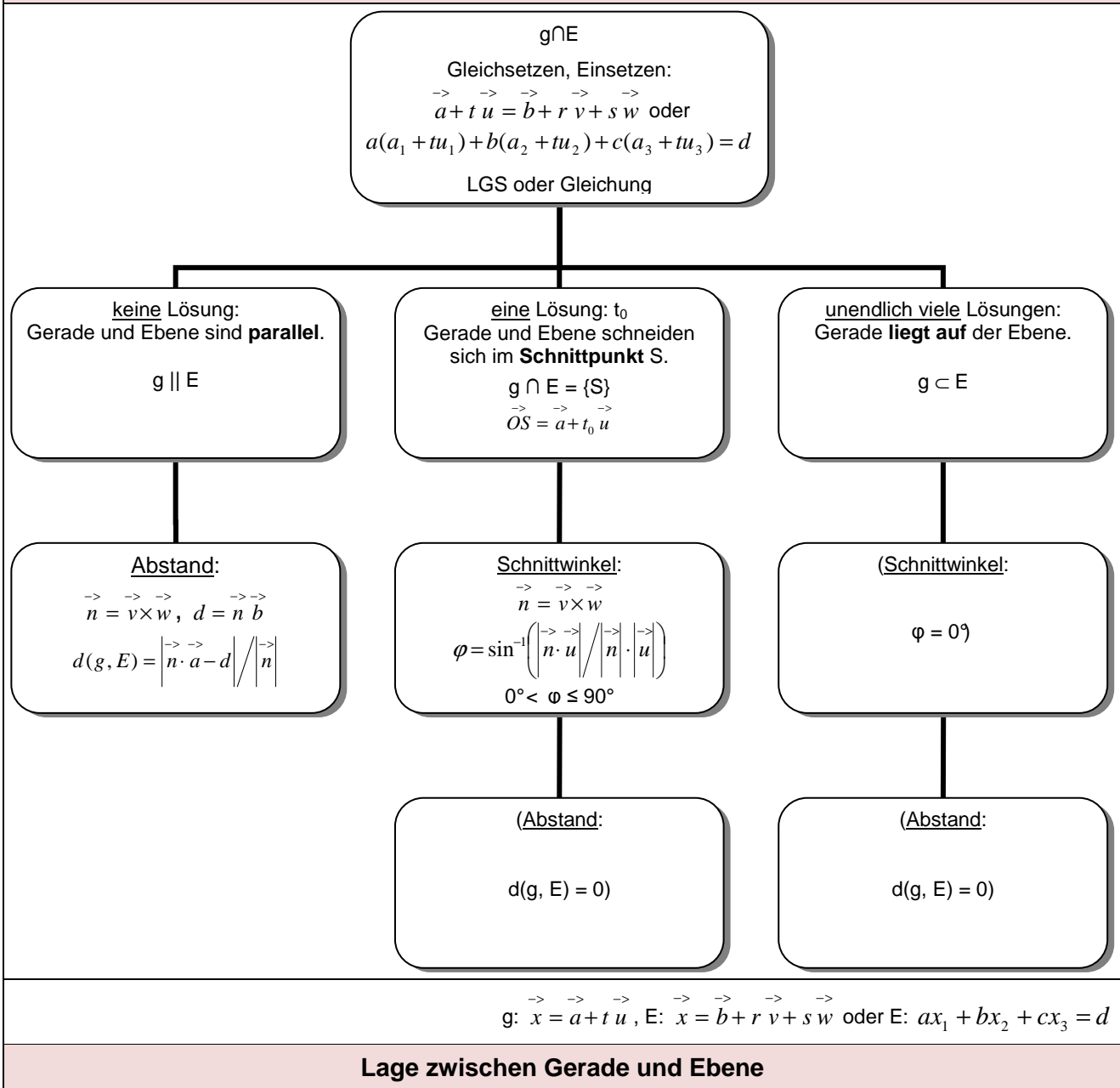
(Abstand:  
 $d(P, E) = 0$ )

$P(p_1|p_2|p_3), E: \vec{x} = \vec{b} + r \vec{v} + s \vec{w}$  oder  $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

## Lage zwischen Punkt und Ebene



## Lage zwischen Gerade und Ebene



## Lage zwischen zwei Ebenen

$$\begin{aligned}
 & E_1 \cap E_2 \\
 & \text{Gleichsetzen, Einsetzen:} \\
 & \vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1 = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2 \quad \text{oder} \\
 & \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \\
 & a(b_{21} + tv_{21} + uw_{21}) + b(b_{22} + tv_{22} + uw_{22}) + c(b_{23} + tv_{23} + uw_{23}) = d_1 \\
 & \text{LGS oder Gleichung}
 \end{aligned}$$

keine Lösung:  
Ebenen sind **parallel**.

$E_1 \parallel E_2$

unendlich viele Lösungen:  
1 Parameter t  
Ebene schneiden sich in einer  
**Schnittgeraden g**.

$E_1 \cap E_2 = g$   
 $g: x = a + t u$

unendlich viele Lösungen:  
2 Parameter t, u  
Ebenen sind **identisch**.

$E_1 = E_2$

Abstand:

$$\begin{aligned}
 \vec{n}_1 &= \vec{v}_1 \times \vec{w}_1, \quad d_1 = \vec{n}_1 \cdot \vec{b}_1 \\
 d(E_1, E_2) &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{b}_2 - d_1|}{|\vec{n}_1|}
 \end{aligned}$$

Schnittwinkel:

$$\begin{aligned}
 \vec{n}_1 &= \vec{v}_1 \times \vec{w}_1, \quad \vec{n}_2 = \vec{v}_2 \times \vec{w}_2 \\
 \varphi &= \cos^{-1} \left( \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right) \\
 0^\circ &< \varphi \leq 90^\circ
 \end{aligned}$$

(Schnittwinkel:

$\varphi = 0^\circ$ )

(Abstand:

$d(E_1, E_2) = 0$ )

(Abstand:

$d(E_1, E_2) = 0$ )

$$E_1: x = \vec{b}_1 + r \vec{v}_1 + s \vec{w}_1 \quad \text{oder} \quad E_1: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d_1, \quad E_2: x = \vec{b}_2 + t \vec{v}_2 + u \vec{w}_2 \quad \text{oder} \quad E_2: ex_1 + fx_2 + gx_3 = d_2$$

## Lage zwischen zwei Ebenen