

Mathematik-Formelsammlung

> Vektorrechnung

> Punkte, Geraden, Ebenen

> Spiegelungen

Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ lassen sich im dreidimensionalen reellen Vektorraum \mathbf{R}^3 identifizieren mit Ortsvektoren \vec{OP} (mit: $O(0|0|0)$ als Koordinatenursprung), Linearkombinationen von Vektoren sind

Geraden $g: x = a + t u$, $g_1: x = a_1 + s u_1$, $g_2: x = a_2 + t u_2$ und Ebenen $E: x = b + r v + s w$ (mit Stützvektoren, Richtungs- und Spannvektoren sowie den reellen Parametern). Geraden liegen nur in Parameterform vor, bei den Ebenen ergeben sich die Formen:

- $E: x = b + r v + s w$ (Parameterform)
- $E: \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x - p \end{pmatrix} = 0$ (Normalenform)
- $E: \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x - p \end{pmatrix} = 0$ (Hesse'sche Normalenform)
- $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform)

(unter Beachtung des Skalar- und Kreuzprodukts zwischen den Vektoren).

Es gilt dann für die Spiegelungen von Punkten, Geraden und Ebenen an Punkten, Geraden und Ebenen:

- Punkt \rightarrow Spiegelpunkt/-gerade/-ebene \rightarrow Bildpunkt
- Gerade \rightarrow 2 Punkte auf der Geraden \rightarrow Spiegelpunkt/-gerade/-ebene \rightarrow Bildpunkte \rightarrow gespiegelte Gerade
- Ebene \rightarrow 3 Punkte auf der Ebene \rightarrow Spiegelpunkt/-gerade/-ebene \rightarrow Bildpunkte \rightarrow gespiegelte Ebene

Gespiegelt wird nach immer der gleichen Vorgehensweise: Ist A ein zu spiegelnder Punkt und F der Punkt, um den gespiegelt wird, bzw. der Lotpunkt zu A auf Spiegelgeraden bzw. Spiegelebene, so ergibt sich der Bildpunkt A' als:

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$$

**Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelpunkt -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene
(Punktspiegelung)**

Punkt A

Gerade: $g: \vec{x} = a + t u$
 Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$,
 B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{u}$

Ebene: $E: \vec{x} = a + r v + s w$
 Punkte: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$, B mit $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{v}$,
 C mit $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{w}$

Spiegelpunkt F

Spiegelpunkt F

Spiegelpunkt F

Bildpunkt A':
 $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$

Bildpunkte A', B':
 $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$, $\vec{OB}' = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}$
Gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t \vec{A'B}'$

Bildpunkte A', B', C':
 $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$, $\vec{OB}' = \vec{OB} + 2 \cdot \vec{BF}$,
 $\vec{OC}' = \vec{OC} + 2 \cdot \vec{CF}$
Gespiegelte Ebene: $E': \vec{x} = \vec{OA}' + r \vec{A'B}' + s \vec{A'C}'$

oder:

Gerade: $g: \vec{x} = a + t u$
 Punkt: A mit $\vec{OA} = \vec{a}$

Ebene: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$
 Punkt: $A \in E$ (etwa als Spurpunkt)
 Normalenvektor: $\vec{n} = (a \ b \ c)^T$

Spiegelpunkt F

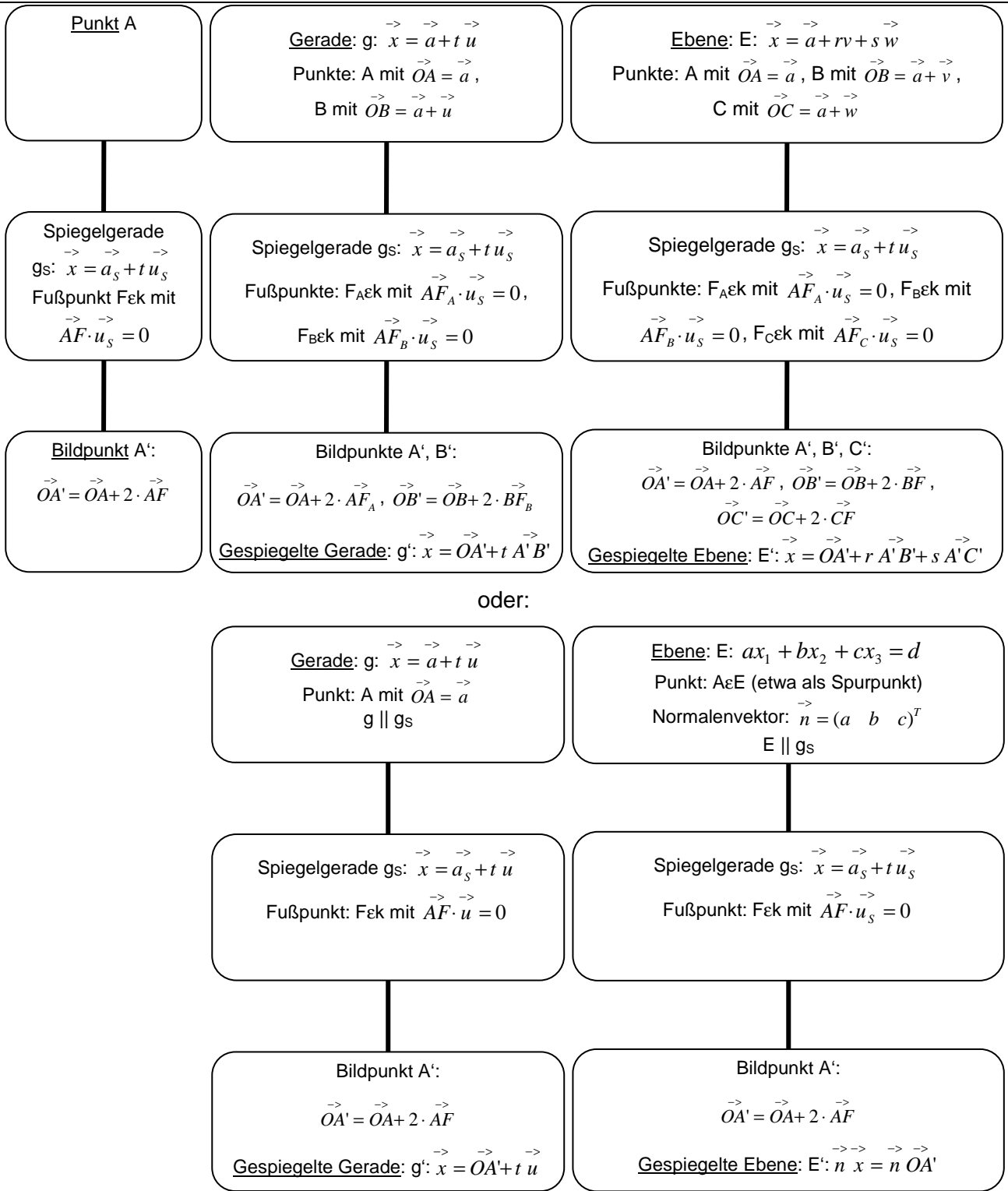
Spiegelpunkt F

Bildpunkte A':
 $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$
Gespiegelte Gerade: $g': \vec{x} = \vec{OA}' + t u$

Bildpunkt A':
 $\vec{OA}' = \vec{OA} + 2 \cdot \vec{AF}$
Gespiegelte Ebene: $E': n \cdot x = n \cdot \vec{OA}'$

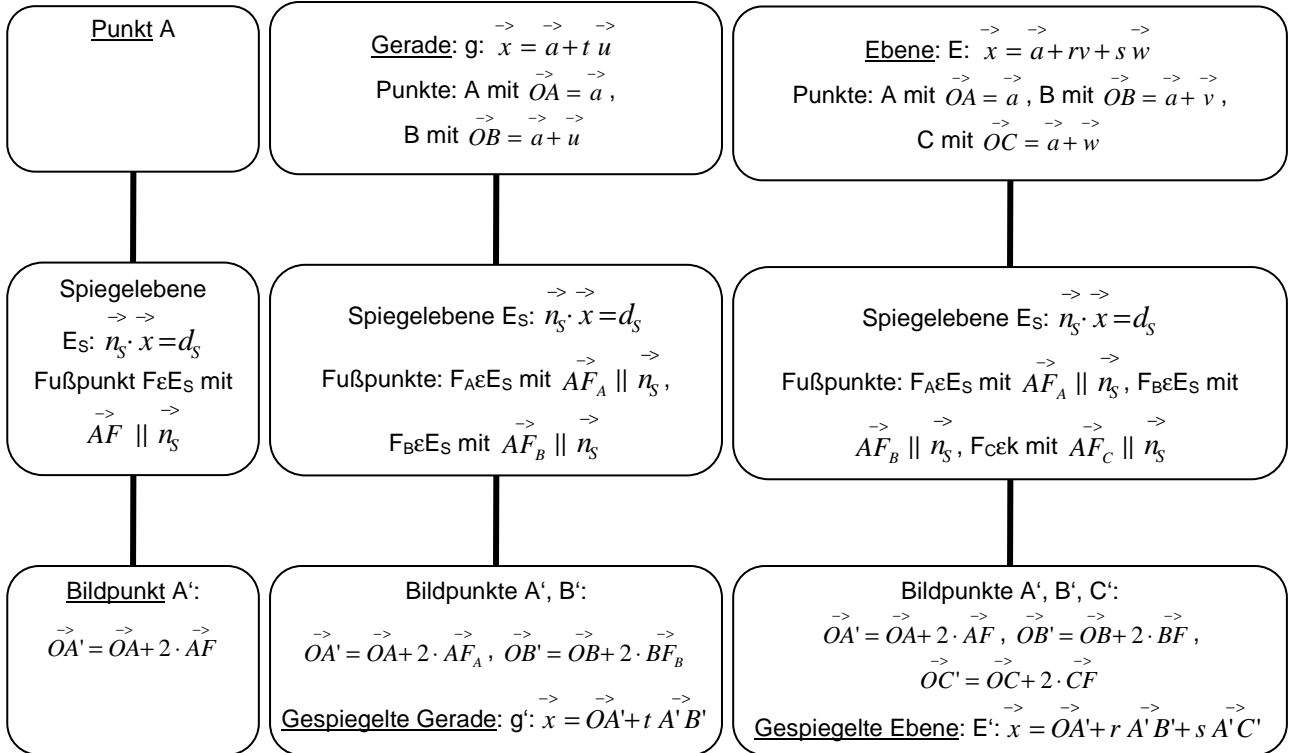
**Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelpunkt -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene
(Punktspiegelung)**

**Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelgerade -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene
(Achsenspiegelung)**

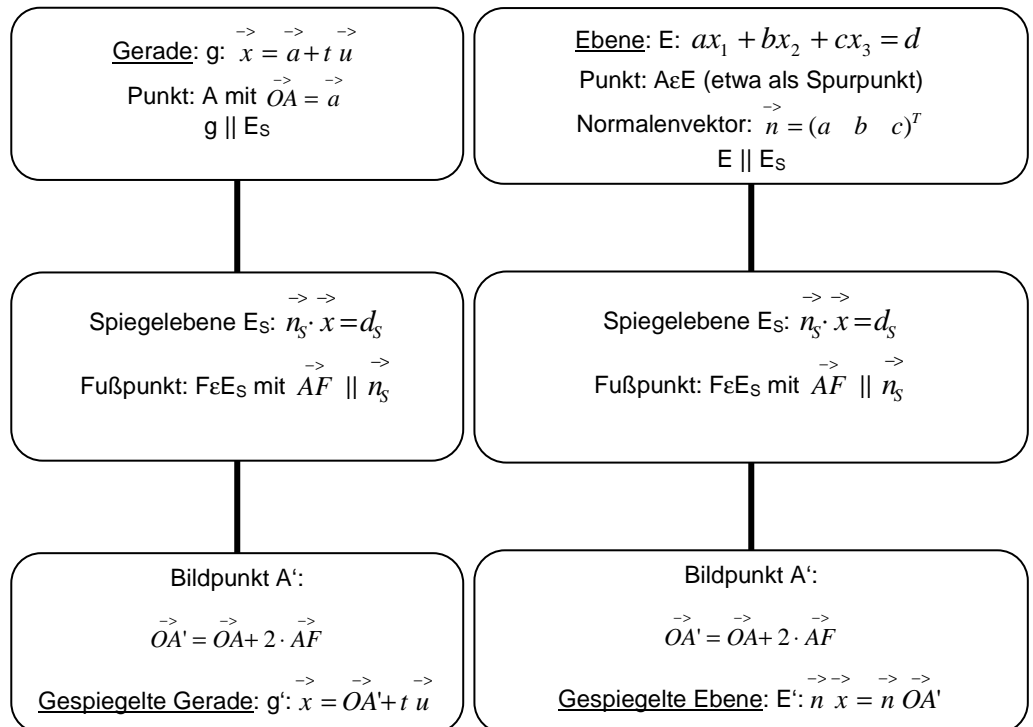


**Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelgerade -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene
(Achsenspiegelung)**

**Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelebene -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene
(Ebenenspiegelung)**



oder:



**Punkt, Gerade, Ebene -> Spiegelebene -> Bildpunkt, Bildgerade, Bildebene
(Ebenenspiegelung)**