Mathematik > Wahrscheinlichkeitsrechnung > Grundlagen

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik)

Stochastik oder Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeiten, also mit mathematischen Größen p ($0 \le p \le 1$, p reell), die im Rahmen von Zufallsexperimenten als Maß für die Sicherheit bzw. Unsicherheit eines Ergebnisses bzw. Ereignisses in Erscheinung treten. Zufallsexperimente (Zufallsversuche, Zufallsvorgänge) sind mathematisch modellierte Prozesse, die auf der (endlichen) Wiederholung (Mehrstufigkeit) einer gleichen festgelegten Versuchssituation (Merkmale, Versuchsausgänge) beruhen, wobei die (abzählbar-endlichen) möglichen Ergebnisse einer solchen Versuchsdurchführung ebenso wie die Ergebniswahrscheinlichkeiten (als relative Häufigkeiten [Gesetz der großen Zahlen]) bekannt sind. Zufallsexperimente lassen sich durch sog. Wahrscheinlichkeitsbäume (aus Knoten, Verzweigungen [Ausgänge, Merkmalsausprägungen], Kanten [Zweige] und Pfaden [Äste]) darstellen, die Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten anzeigen. Zufallsexperimente, die auf Ergebnisse mit immer derselben Wahrscheinlichkeit hinführen, heißen Laplace-Experimente. Ergebnisse sind Elementarereignisse, Ereignisse sind Zusammenfassungen von Ergebnissen (Mengenlehre der Ereignisse), die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses errechnet sich gemäß den Pfadregeln (Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten innerhalb eines Pfades, Addition von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade); die Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments stellt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung dar; die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse ergibt das sichere Ereignis. Aus diesen Sachverhalten folgt die Axiomatik der Wahrscheinlichkeiten mit den daraus abgeleiteten Formeln des Additionssatzes und des Gegenereignisses.

Ist S die Menge der Ergebnisse eines Zufallsexperiments, so stellen Teilmengen A, B, … von S (A, B, … $\subset$ S) Ereignisse dar. Hinsichtlich eines Ergebnisses $a \in S$ ergibt sich als Wahrscheinlichkeit des dazugehörigen Elementarereignisses $\{a\} \subset S$ als $p(\{a\})$, die Wahrscheinlichkeit p(A) eines Ereignisses A als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die im Ereignis enthalten sind. Für Wahrscheinlichkeiten p und Ereignisse A, B, … $\subset$ S eines Zufallsexperiments gilt:

Ereignisse	**Wahrscheinlichkeiten**
Leeres/unmögliches Ereignis Ø	$p(Ø) = 0$
Sicheres Ereignis S	$p(S) = 1$
Ereignis A	$0 \le p(A) \le 1$
Ereignisse A, B disjunkt -> $A \cup B$ als Ereignis „A oder B“	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
Ereignisse A, B -> $A \cup B$ als Ereignis „A oder B“, $A \cap B$ als Ereignis „A und B“	Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) – p(A \cap B)$
Ereignisse A, B, $B \subset A$ -> $A \backslash B$ als Ereignis „A ohne B“	$p(A \backslash B) = p(A) – p(B)$
Ereignis A -> Gegenereignis $\bar{A} = S \backslash A$ als Ereignis „nicht A“	$p(A) + p(\bar{A}) = 1$, $p(\bar{A}) = 1 – p(A)$

Ereignisse, Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsbäume

Ein Wahrscheinlichkeitsbaum dient der grafischen Aufbereitung und Beschreibung eines n-stufigen Zufallsexperiments mit k_1, k_2, … Verzweigungen von Merkmalen (Ausgänge, Merkmalsausprägungen, je Stufe) (n, k_1, k_2, … als natürliche Zahlen) und besteht aus einer dem Zufallsversuch und dessen (kausaler) Entscheidungshierarchie entsprechenden (gerichteten) Anordnung von Knoten und Kanten.

<u>Wahrscheinlichkeitsbaum</u> (Merkmale: Merkmal A (Ausgänge a, c), Merkmal B (Ausgänge b, d); zweistufig):

	Merkmal A	Merkmal B	◀ *Merkmale*					
		p(b) **b**	>	p(**a; b**) =	p(a)p(b)	1	◀ *Pfad (a;b)*	◀
	p(a) **a**							
		1-p(b) **d**	>	p(**a; d**) =	p(a)(1-p(b))	2	◀ *Pfad (a;d)*	
								Ereignis E: p(A) = p(a;b)+p(c;d) = p(a)p(b)+p(c)p(d)
		1-p(d) **b**	>	p(**c; b**) =	p(c)(1-p(d))	3	◀ *Pfad (c;b)*	
	p(c) **c**							
		p(d) **d**	>	p(**c; d**) =	p(c)p(d)	4	◀ *Pfad (c;d)*	◀
	Wurzel ▲ Knoten, Kanten ▲ Blätter							
	1. Stufe	*2. Stufe*	Summe:		1			
	▲ Wahrscheinlichkeiten, Merkmalsausprägungen				*▲ Wahrscheinlichkeitsverteilung*		*▲ Ergebnisse*	

Die Knoten stellen die (Zwischen-) Ergebnisse des Zufallsversuchs dar gemäß der jeweiligen Durchführung des Experiments, die Kanten sind mit den dem jeweiligen Ergebnis entsprechenden Wahrscheinlichkeiten versehen. Die Wahrscheinlichkeiten im Wahrscheinlichkeitsbaum ergeben sich aus kombinatorischen Überlegungen (Urnenmodell mit/ohne Zurücklegen u.a.). Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Kanten, die von einem Knoten ausgehen, ist 1.
Die Aufeinanderfolge von Kanten zwischen dem Anfangsknoten des Wahrscheinlichkeitsbaums (Wurzel) und den Endknoten (Blättern) heißt Pfad. Für ein Ereignis A gelten hinsichtlich der das Ereignis charakterisierenden Pfade und deren Wahrscheinlichkeiten die <u>Pfadregeln</u>:

1. Entlang eines zum Ereignis E gehörenden Pfades werden die Wahrscheinlichkeiten der Pfadkanten multipliziert. Es ergibt die Wahrscheinlichkeit des Pfades (Pfad: O -> p(a) -> a -> p(b) -> b …: p(a;b;…) = p(a)·p(b)·…).
2. Die multiplizierten Wahrscheinlichkeiten von allen zum Ereignis E gehörenden Pfaden werden addiert. Es ergibt sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E (Pfade: O -> p(a) -> a -> p(b) -> b …; O -> p(c) -> c -> p(d) -> d …; …: p(E) = p(a;b;…) + p(c;d;…) + …).

Ein Pfad in einem Wahrscheinlichkeitsbaum stellt ein Elementarereignis dar. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist folglich 1. Wird ein Ereignis E durch mehr Pfade charakterisiert als sein Gegenereignis E^-, so empfiehlt sich, die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses zu berechnen, so dass die Formel $p(E) = 1 – p(E^-)$ zum Tragen kommt.
Je nach Fragestellung können vorgegebene Wahrscheinlichkeitsbäume umorganisiert, reduziert und „eingeklappt“ werden, indem bestimmte Merkmalsausprägungen zusammengefasst und somit die Zahl der Kanten vermindert werden. Allgemein ist zur Anzahl der Pfade in einem Wahrscheinlichkeitsbaum zu sagen, dass bei n-maligem Durchführen eines Zufallsversuchs mit gleichen k Ausgängen je Stufe die Pfadanzahl k^n beträgt; bei unterschiedlicher Anzahl von Ausgängen k_1, k_2, …, k_n ist die Pfadanzahl $k_1 \cdot k_2 \cdot … \cdot k_n$.

Beispiele

a) In einer Urne befinden sich 8 blaue, 6 weiße, 3 rote und 3 grüne Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen, so dass sich der nebenstehende Wahrscheinlichkeitsbaum ergibt.

Als Wahrscheinlichkeiten ergeben sich für die Ergebnisse bzw. Grundereignisse:

p(blau) = 8/20 = 0,4
p(weiß) = 6/20 = 0,3
p(rot) = 3/20 = 0,15
p(grün) = 3/20 = 0,15,

für (zusammengesetzte) Ereignisse etwa:

p(blau oder rot) = p(blau) + p(rot) = 8/20 + 3/20 = 11/20

p(nicht grün) = p(blau) + p(weiß) + p(rot) =
8/20 + 6/20 + 3/20 = 17/20 bzw.
p(nicht grün) = 1 – p(grün) = 1 – 3/20.

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: blau, weiß, rot, grün; 1-maliges Durchführen):

1.	Versuchsdurchführung(en)			
8/20 **blau**	>	p(**blau**) =	0.4	**1**
6/20 **weiß**	>	p(**weiß**) =	0.3	**2**
3/20 **rot**	>	p(**rot**) =	0.15	**3**
3/20 **grün**	>	p(**grün**) =	0.15	**4**
		Summe:	1	

b) Das zweimalige Würfeln eines vierflächigen Tetraeders mit den Zahlen 1, 2, 4 und 8 ist ein zweistufiges Laplace-Experiment (mit Zurücklegen) mit dem nebenstehenden Wahrscheinlichkeitsbaum.

Alle Ergebnisse (1;1) bis (8;8) des Würfelversuchs haben dieselbe Wahrscheinlichkeit $1/4 \cdot 1/4 = 1/16 = 0{,}0625$. Es liegt also ein Laplace-Experiment vor. Die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen sind Summen von Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, z.B.:

p(2. Wurf = 4) = p(1;4) + p(2;4) + p(4;4) + p(8;4) = $4 \cdot 1/16 = 1/4 = 0{,}25$

p(Augensumme = 10) = p(2;8) + p(8;2) = $2 \cdot 1/16 = 1/8 = 0{,}125$

p(Augensumme ≤ 5) = p(1;1) + p(1,2) + p(1;4) + p(2;1) + p(2;2) + p(4;1) = $6 \cdot 1/16 = 3/8 = 0{,}375$.

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: 1, 2, 4, 8; mit Zurücklegen; 2-maliges Durchführen):

1.	2.	Versuchsdurchführung(en)			
	1/4 **1**	>	p(**1**; **1**) =	0.0625	**1**
	1/4 **2**	>	p(**1**; **2**) =	0.0625	**2**
1/4 **1**					
	1/4 **4**	>	p(**1**; **4**) =	0.0625	**3**
	1/4 **8**	>	p(**1**; **8**) =	0.0625	**4**
	1/4 **1**	>	p(**2**; **1**) =	0.0625	**5**
	1/4 **2**	>	p(**2**; **2**) =	0.0625	**6**
1/4 **2**					
	1/4 **4**	>	p(**2**; **4**) =	0.0625	**7**
	1/4 **8**	>	p(**2**; **8**) =	0.0625	**8**
	1/4 **1**	>	p(**4**; **1**) =	0.0625	**9**
	1/4 **2**	>	p(**4**; **2**) =	0.0625	**10**
1/4 **4**					
	1/4 **4**	>	p(**4**; **4**) =	0.0625	**11**
	1/4 **8**	>	p(**4**; **8**) =	0.0625	**12**
	1/4 **1**	>	p(**8**; **1**) =	0.0625	**13**
	1/4 **2**	>	p(**8**; **2**) =	0.0625	**14**
1/4 **8**					
	1/4 **4**	>	p(**8**; **4**) =	0.0625	**15**
	1/4 **8**	>	p(**8**; **8**) =	0.0625	**16**
			Summe:	1	

c) In einer Schublade liegen 18 schwarze, 12 blaue und 8 rote Socken durcheinander. Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit, dass am frühen Morgen bei Dunkelheit aus der Schublade zwei gleichfarbige Socken gezogen werden, um adäquat bekleidet zu sein.

Da bei einem zweibeinigen Menschen zwei Socken gleicher Farbe benötigt werden, liegt ein zweistufiges Zufallsexperiment ohne Zurücklegen vor. Es ergibt sich auf Grund der drei Ausgänge ein Wahrscheinlichkeitsbaum mit $3^2 = 9$ Pfaden:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: schwarz, blau, rot; ohne Zurücklegen; 2-maliges Durchführen):

1.	2.		Versuchsdurchführung(en)		
	17/37 **schwarz**	>	p(**schwarz; schwarz**) =	0.2176387	**1**
18/38 **schwarz**	12/37 **blau**	>	p(**schwarz; blau**) =	0.1536273	**2**
	8/37 **rot**	>	p(**schwarz; rot**) =	0.1024182	**3**
	18/37 **schwarz**	>	p(**blau; schwarz**) =	0.1536273	**4**
12/38 **blau**	11/37 **blau**	>	p(**blau; blau**) =	0.0938834	**5**
	8/37 **rot**	>	p(**blau; rot**) =	0.0682788	**6**
	18/37 **schwarz**	>	p(**rot; schwarz**) =	0.1024182	**7**
8/38 **rot**	12/37 **blau**	>	p(**rot; blau**) =	0.0682788	**8**
	7/37 **rot**	>	p(**rot; rot**) =	0.0398293	**9**
			Summe:	1	

Die Wahrscheinlichkeit, gleichfarbige Socken zu ziehen, errechnet sich durch Addition der Wahrscheinlichkeiten, die zu den drei Ergebnissen (schwarz; schwarz), (blau; blau) und (rot; rot) gehören, also:

p(gleichfarbige Socken) = p(schwarz; schwarz) + p(blau; blau) + p(rot; rot) =
$18/38 \cdot 17/37 + 12/38 \cdot 11/37 + 8/38 \cdot 7/37 = 13/37$.

Die Wahrscheinlichkeit, an den Füßen korrekt bekleidet zu sein, beträgt also ungefähr 0,351 = 35,1%.

d) Auf einem Glücksrad befinden sich 8 rote und 2 weiße Felder. Das Glücksrad wird zweimal gedreht, so dass das Nebenstehende gilt.

Als Wahrscheinlichkeiten errechnen sich im Wahrscheinlichkeitsexperiment (mit Zurücklegen):

p(2 x weiß) = p(weiß, weiß) = $2/10 \cdot 2/10 = 0{,}04$

p(1 x weiß) = p(weiß, rot) + p(rot, weiß) =
$2/10 \cdot 8/10 + 8/10 \cdot 2/10 = 0{,}32$

p(0 x weiß) = p(rot, rot) = $8/10 \cdot 8/10 = 0{,}64$.

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: rot, weiß; mit Zurücklegen; 2-maliges Durchführen):

1.	2.		Versuchsdurchführung(en)		
	8/10 **rot**	>	p(**rot; rot**) =	0.64	**1**
8/10 **rot**					
	2/10 **weiß**	>	p(**rot; weiß**) =	0.16	**2**
	8/10 **rot**	>	p(**weiß; rot**) =	0.16	**3**
2/10 **weiß**					
	2/10 **weiß**	>	p(**weiß; weiß**) =	0.04	**4**
			Summe:	1	

e) Neben den Wahrscheinlichkeitsbäumen helfen beim Laplace-Experiment auch Tabellen, die die Ergebnisse des Zufallexperiments auflisten. Der normale Spielwürfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 z.B. wird zweimal geworfen. Es ergibt sich wieder ein Laplace-Experiment; jedes Ergebnis (1;1) bis (6;6) besitzt die Wahrscheinlichkeit 1/36. Tabellarisch lässt sich der Zufallsversuch wie folgt darstellen:

1. Wurf | 2. Wurf	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Aus der Tabelle lassen sich nun leicht Anzahlen ermitteln, die mit 1/36 multipliziert Wahrscheinlichkeiten ergeben. Z.B. besitzt das Ereignis, gleiche Augenzahlen zu würfeln, die Wahrscheinlichkeit: p(gleiche Augenzahl) = $6\cdot 1/36 = 1/6$ wegen:

1. Wurf | 2. Wurf	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Das Ereignis, nur gerade Augenzahlen zu werfen, bedeutet:

1. Wurf | 2. Wurf	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

und führt auf die Wahrscheinlichkeit: p(nur gerade Augenzahlen) = $9\cdot 1/36 = 1/4$. Es gilt der Additionssatz für (disjunkte) Ergebnisse, Elementarereignisse, Ereignisse. Das Konzept des Gegenereignisses wird verwendet bei Betrachtung der folgenden Berechnung: p(Augensumme > 4) = 1 – p(Augensumme ≤ 4) = $1 - 6\cdot 1/36 = 1-1/6 = 5/6$ auf Grund von:

1. Wurf | 2. Wurf	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Erwartungswert

Bewertet man Ereignisse etwa in einem Glücksspiel als Zufallsexperiment mit Geld, so ergibt sich die Situation des Erwartungswertes. Ein Zufallsexperiment ist ein Spiel, wenn im Experiment auftretende Ereignisse A, B, … mit positiven (Gewinn) oder negativen (Verlust) Geldeinheiten (GE) g_A, g_B, … bewertet werden oder wenn Gewinnpositionen ein Spieleinsatz e (GE) gegenübersteht. Die Ereignisse haben die Wahrscheinlichkeiten p(A), p(B), …, die Wahrscheinlichkeiten der sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse entsprechen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit p(A) + p(B) + … + p(sonst) = 1. Der Erwartungswert E gibt den durchschnittlichen Gewinn oder Verlust pro Spiel an (GE), d.h. es gilt:

$$E = g_A p(A) + g_B p(B) + \ldots$$

bzw.

$$E = g_A p(A) + g_B p(B) + \ldots - e.$$

D.h.: Der Erwartungswert ist die Summe aller Produkte, die sich aus dem Gewinn oder Verlust und der Wahrscheinlichkeit jeweils eines Ereignisses ergeben, eventuell abzüglich des Spieleinsatzes. Ein Spiel heißt im Übrigen fair, wenn der Erwartungswert E gleich Null ist.

Beispiele

a) Ein Würfel wird einmal geworfen; der Spieler bekommt die einen Gewinn (GE) in Höhe der gewürfelten Zahl, wenn er die „1“, „3“ oder „6“ würfelt, andernfalls erleidet einen Verlust (GE) in Höhe der gewürfelten Zahl. Der Erwartungs-wert errechnet sich auf Grund der gleichverteilten Wahrscheinlichkeit p(1) = … p(6) = 1/6 und der Gewinne und Verluste $g_1 = +1$, $g_2 = -2$, $g_3 = +3$, $g_4 = -4$, $g_5 = -5$, $g_6 = +6$ als:

$E=1\cdot\frac{1}{6}-2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}-4\cdot\frac{1}{6}-5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}\approx-0{,}17$, d.h.: der Spieler verliert pro Spiel im Durchschnitt (im Mittel, auf lange Sicht) 0,17 GE.

b) Bei einem Einsatz von € 2,50 wird ein Glücksrad mit den drei Farben rot, blau und grün (p(r) = 0,3; p(b) = 0,5; p(g) = 0,2) zweimal gedreht. Es folgt:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: rot, blau, grün; mit Zurücklegen; 2-maliges Durchführen):

1.	2.	Versuchsdurchführung(en)			
	0.3 **rot**	>	p(**rot; rot**) =	0.09	**1**
0.3 **rot**	0.5 **blau**	>	p(**rot; blau**) =	0.15	**2**
	0.2 **grün**	>	p(**rot; grün**) =	0.06	**3**
	0.3 **rot**	>	p(**blau; rot**) =	0.15	**4**
0.5 **blau**	0.5 **blau**	>	p(**blau; blau**) =	0.25	**5**
	0.2 **grün**	>	p(**blau; grün**) =	0.1	**6**
	0.3 **rot**	>	p(**grün; rot**) =	0.06	**7**
0.2 **grün**	0.5 **blau**	>	p(**grün; blau**) =	0.1	**8**
	0.2 **grün**	>	p(**grün; grün**) =	0.04	**9**
			Summe:	1	

Der Spieler gewinnt € 10,-, wenn zweimal „rot“ (r) erscheint, € 3,-, wenn einmal „rot“ erscheint, sonst nichts. Die Wahrscheinlichkeiten sind: p(2xr) = 0,3·0,3 = 0,09, p(1xr) = 0,3·0,7 + 0,7·0,3 = 0,42 (laut Wahrscheinlichkeitsbaum). Der Erwartungswert errechnet sich mit Hilfe einer Tabelle gemäß:

Ereignis	2xr	1xr	sonst		
Auszahlung	10	3	0		
Wahrscheinlichkeit	0,09	0,42	- (oder: 0,49)		(Summe: 1)
Erwartungswert	10·0,09 = 0,9 -> + ->	3·0,42 = 1,26 -> + ->	0 -> - ->	2,50 -> =	-0,34

als: $E=10\cdot 0{,}09+3\cdot 0{,}42-2{,}50=-0{,}34$, d.h.: der Spieler verliert pro Spiel im Durchschnitt 34 ct.

Ein faires Spiel liegt dann vor, wenn: E = 0 gilt. Dies kann hier durch eine Änderung des Einsatzes geschehen. Ist x der dabei zu berechnende Einsatz, so muss die Gleichung $E=10\cdot 0{,}09+3\cdot 0{,}42-x=0$ nach x umgestellt werden; also:

10·0,09 + 3·0,42 – x = 0 (Ausrechnen)
2,16 – x = 0 | +x
2,16 = x

D.h.: der neue Einsatz (für ein faires Spiel) beträgt: 2,16 €. Auch der Gewinnplan kann verändert werden, um ein faires Spiel zu erreichen. Z.B. soll die Auszahlung für zweimal „rot“ diesbezüglich variiert werden. In dem Fall ist in der Gleichung $E=x\cdot 0{,}09+3\cdot 0{,}42-2{,}50=0$ die Auszahlungsvariable x auszurechnen:

0,09x + 3·0,42 – 2,50 = 0 (Ausrechnen)
0,09x – 1,24 = 0 | +1,24
0,09x = 1,24 | :0,09
x = 13,78

Der Auszahlungsbetrag für zweimal „rot“ steigt also von € 10,- auf € 13,78, um ein faires Spiel zu erhalten.

Aufgaben

1. Aus einer Urne werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Die Urne enthält 6 blaue, 4 rote und 2 weiße Kugeln. Ergänze im nachstehenden Wahrscheinlichkeitsbaum die fehlenden Wahrscheinlichkeiten:

1.	2.	Versuchsdurchführung			
	blau	>	p(**blau; blau**) =		**1**
blau	**rot**	>	p(**blau; rot**) =		**2**
	weiß	>	p(**blau; weiß**) =		**3**
	blau	>	p(**rot; blau**) =		**4**
rot	**rot**	>	p(**rot; rot**) =		**5**
	weiß	>	p(**rot; weiß**) =		**6**
	blau	>	p(**weiß; blau**) =		**7**
weiß	**rot**	>	p(**weiß; rot**) =		**8**
	weiß	>	p(**weiß; weiß**) =		**9**

2. Eine Urne enthält 4 rote und 6 schwarze Kugeln. Es wird zweimal gezogen, wobei die gezogenen Kugeln zurückgelegt werden. Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: „Alle gezogenen Kugeln sind rot.“; „Alle gezogenen Kugeln sind schwarz.“; „Es wird genau eine rote Kugel gezogen.“; „Es wird mindestens eine schwarze Kugel gezogen.“

3. Ein Glücksrad besteht aus den Feldern „blau“ (120°), „rot“ (180°) und „gelb“ (60°). Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: „Es erscheint zweimal blau.“; „Es erscheinen nur gleiche Farben.“; „Es erscheinen nur verschiedene Farben.“; „Es erscheinen rot und gelb.“
b) Beim „Glücksrad-Spiel“ zahlt ein Spieler für zweimaliges Drehen des Glücksrads einen Einsatz von € 2,-. Er gewinnt, wenn alle Farben gleich sind, € 5,-, wenn alle Farben „gelb“ sind, zusätzlich € 5,-.

4. Unter 16 Spielkarten befinden sich Buben, Damen und Könige. Zwei Karten werden gleichzeitig aufgedeckt. Ergänze im nachstehenden Wahrscheinlichkeitsbaum die fehlenden Wahrscheinlichkeiten:

1.	2.	Versuchsdurchführung			
	Bube	>	p(**Bube; Bube**) =		**1**
Bube **62,5 %**	**Dame**	>	p(**Bube; Dame**) =		**2**
	König	>	p(**Bube; König**) =		**3**
	Bube	>	p(**Dame; Bube**) =		**4**
Dame	**Dame**	>	p(**Dame; Dame**) =		**5**
	König	>	p(**Dame; König**) =		**6**
	Bube	>	p(**König; Bube**) =		**7**
1/4 **König**	**Dame**	>	p(**König; Dame**) =		**8**
	König	>	p(**König; König**) =		**9**

a) Wie viele Buben, Damen und Könige befinden sich unter den Spielkarten?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, Karten vom selben Typ (Bube, Dame, König) zu ziehen?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens einmal „Dame“ zu ziehen?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal „Bube“ zu ziehen?

5. Aus einer Tüte mit 20 grünen, 15 blauen und 10 roten Bonbons werden zwei Bonbons mit einem Griff herausgezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei gleichfarbige Bonbons zu bekommen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein blaues und ein rotes Bonbon zu ziehen?

6. Ein Glücksrad mit den Farben rot (50%), grün (40%) und weiß (10%) wird zweimal gedreht.
a) Zeichne ein Baumdiagramm.
b) Bei einem Einsatz von 1,- € gewinnt ein Spieler 5,- € bei zweimal „weiß“, 2,- € bei einmal „weiß“ pro Spiel? Ist das Spiel fair?
c) Wie hoch muss der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?
d) Wie hoch muss bei einem Einsatz von 1,- € die Auszahlung für zweimal „weiß“ sein, damit das Spiel fair ist?

Lösungen: 2. p = 0,16, p = 0,36, p = 0,48, p = 1 – 0,16 = 0,84. / 3a) p_b = 1/3, p_r = 1/2, p_g = 1/6 -> p = 1/9, p = 7/18, p = 1 – 7/18 = 11/18, p = 1/6, b) E = 1/12. / 4a) 10xB, 2xD, 4xK; 4b) p = 0,43; c) p = 1 – 0,0083 = 0,992; d) p = 0,875. / 5. p = 0,338, p = 0,152. / 6b) E = -0,59, c) e = 0,41; d) x = 64.

Literaturhinweise: REINHARDT, F., dtv-Atlas zur Schulmathematik. Definitionen, Beweise, Sätze, München [3]2003, S.230-233 (Wahrscheinlichkeitsrechnung).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 07.2019