Bernoulli-Experiment

Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten die Binomialkoeffizienten und damit die Zahlen im Pascalschen Dreieck beim sog. Bernoulli-Experiment auf. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit ($0 \leq p \leq 1$), der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen". Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an (Bernoulli-Kette). Es gelten dann auf Grund der Pfadregeln für Wahrscheinlichkeitsbäume (Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades, Addition der [multiplizierten] Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade) die Trefferwahrscheinlichkeiten der Bernoulli-Formel:

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot ... \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ in der Formel geben die Anzahl der Pfade mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$ an. Als Rechenregeln gelten dann:

$$p(X=0) = (1-p)^n$$
$$p(X=n) = p^n$$
$$p(X\leq k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k) = 1 - p(X>k)$$
$$p(X<k) = p(X\leq k-1) = 1 - p(X\geq k)$$
$$p(X\geq k) = 1 - p(X\leq k-1)$$
$$p(X>k) = p(X\geq k+1) = 1 - p(X\leq k)$$
$$p(k_1\leq X\leq k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\leq k_2)-p(X\leq k_1-1)$$
$$p(k_1<X\leq k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\leq k_2)-p(X\leq k_1)$$
$$p(k_1\leq X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\leq k_2-1)-p(X\leq k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\leq k_2-1)-p(X\leq k_1)$$

Rechenregeln für Bernoulli-Wahrscheinlichkeiten

Die Terme p(X=k) (n, k als natürliche Zahlen, $0\leq k\leq n$) definieren eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (Binomialverteilung) der Zufallsvariablen X mit Trefferanzahl k, Erwartungswert E(X) und Standardabweichung σ(X):

$$E(X) = \mu = np$$
$$\sigma(X) = \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Die Terme $p(X\leq k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k)$ stehen für die kumulierte Wahrscheinlichkeit bis Trefferanzahl k.

Signifikanztests

Mit Hilfe der Binomialverteilung können sog. Signifikanztests durchgeführt werden, um bei unbekannter Grundwahrscheinlichkeit p eines Bernoulli-Experiments diese Wahrscheinlichkeit anhand von Stichproben zu testen. Dabei wird einer Nullhypothese H_0 eine Gegenhypothese (Alternativhypothese) H_1 gegenübergestellt. Auf der Grundlage einer Entscheidungsregel (Ablehnungsbereich, Nichtablehnungsbereich) bei einer vorgegebenen maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau) α ergibt sich ein Testszenario, dem das Ergebnis einer Stichprobe unterworfen wird. Zu unterscheiden sind einseitige von zweiseitigen Tests:

Typ	*Test*
einseitiger linksseitiger Test	H_0: $p=p_0$ bzw. H_0: $p\geq p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p<p_0$ (Gegenhypothese)
einseitiger rechtsseitiger Test	H_0: $p=p_0$ bzw. H_0: $p\leq p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p>p_0$ (Gegenhypothese)
zweiseitiger Test	H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p\neq p_0$ (Gegenhypothese)

Beim Verwerfen oder Nichtverwerfen der Nullhypothese H_0 der Signifikanztests (Entscheidungsregel) begeht man Fehler der 1. und 2. Art. Ein Fehler 1. Art entsteht, wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig (wahr) ist; der Fehler 1. Art ist identisch mit der Irrtumswahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereichs und damit kleiner gleich dem Signifikanzniveau α. Ein Fehler 2. Art entsteht, wenn die Nullhypothese nicht verworfen wird, obwohl sie falsch ist. In diesem Fall kann der Fehler nur abgeschätzt werden, wenn die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit p* (statt p_0 in den Signifikanztests) bekannt ist. Es gilt damit die Übersicht:

Test	*Fehler 1. Art* H_0 wird verworfen, obwohl richtig (Trefferwahrscheinlichkeit p)	*Fehler 2. Art* H_0 wird nicht verworfen, obwohl falsch (Trefferwahrscheinlichkeit p*)
H_0: $p=p_0$ bzw. H_0: $p\geq p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p<p_0$ (Gegenhypothese)	$p(X\leq g)$ <- p	$p(X>g)$ <- p*
H_0: $p=p_0$ bzw. H_0: $p\leq p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p>p_0$ (Gegenhypothese)	$p(X\geq g)$ <- p	$p(X<g)$ <- p*
H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p\neq p_0$ (Gegenhypothese)	$p(X\leq g_1) + p(X\geq g_2)$ <- p	$p(g_1<X<g_2)$ <- p*

bzw.:

Test	*Fehler 1. Art* H_0 wird verworfen, obwohl richtig (Trefferwahrscheinlichkeit p)	*Fehler 2. Art* H_0 wird nicht verworfen, obwohl falsch (Trefferwahrscheinlichkeit p*)
H_0: $p=p_0$ bzw. H_0: $p\geq p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p<p_0$ (Gegenhypothese)	$p(X<a)$ <- p	$p(X\geq a)$ <- p*
H_0: $p=p_0$ bzw. H_0: $p\leq p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p>p_0$ (Gegenhypothese)	$p(X>b)$ <- p	$p(X\leq b)$ <- p*
H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese) gegen H_1: $p\neq p_0$ (Gegenhypothese)	$p(X<a) + p(X>b)$ <- p	$p(a\leq X\leq b)$ <- p*

Wenn richtige Entscheidungen getroffen werden (Entscheidungsregel: Nichtverwerfen der Nullhypothese, wenn H_0 richtig; Verwerfen der Nullhypothese, wenn H_0 falsch), treten keine Fehler auf.

Einseitige Signifikanztests

Für einseitige Signifikanztests ergibt sich:

Einseitiger Signifikanztest (linksseitig):

H_0: $p=p_0$ bzw. H_0: $p \geq p_0$ (Nullhypothese)
gegen H_1: $p<p_0$ (Gegenhypothese)

bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> Ablehnungsbereich [0; g] = {0, 1, … g} der Nullhypothese bei größtem g mit:

$$p(X \leq g) \leq \alpha$$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Ablehnung bzw. Nichtablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Ablehnungsbereich bzw. sonst (Entscheidungsregel) -> Irrtumswahrscheinlichkeit als Fehler 1. Art $p(X \leq g) \leq \alpha$ (bezogen auf den Ablehnungsbereich), Fehler 2. Art $p(X>g)$ unter Trefferwahrscheinlichkeit $p^* < p$ (bezogen auf den Nichtablehnungsbereich).

Dem Ablehnungsbereich [0; g] entspricht der Nichtablehnungsbereich [g+1; n].

Einseitiger Signifikanztest (rechtsseitig):

H_0: $p=p_0$ bzw. H_0: $p \leq p_0$ (Nullhypothese)
gegen H_1: $p>p_0$ (Gegenhypothese)

bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> Ablehnungsbereich [g; n] = {g, g+1, … n} der Nullhypothese bei kleinstem g mit:

$$p(X \geq g) \leq \alpha \ (*)$$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Ablehnung bzw. Nichtablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Ablehnungsbereich bzw. sonst (Entscheidungsregel) -> Irrtumswahrscheinlichkeit als Fehler 1. Art $p(X \geq g) \leq \alpha$ (bezogen auf den Ablehnungsbe-reich), Fehler 2. Art $p(X<g)$ unter Trefferwahrscheinlichkeit $p^* > p$ (bezogen auf den Nichtablehnungsbereich).

(Dabei gilt hinsichtlich der Beziehung (*) die nützliche Umformung:

$$p(X \geq g) \leq \alpha \Leftrightarrow 1-p(X \leq g-1) \leq \alpha \Leftrightarrow -p(X \leq g-1) \leq \alpha - 1 \Leftrightarrow p(X \leq g-1) \geq 1-\alpha.)$$

Dem Ablehnungsbereich [g; n] entspricht der Nichtablehnungsbereich [0; g-1].

oder:

Einseitiger Signifikanztest (linksseitig):

H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese)
gegen H_1: $p<p_0$ (Gegenhypothese)

bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> Nichtablehnungsbereich [a; n] der Nullhypothese bei kleinstem a mit

$$p(X \leq a) > \alpha$$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Nichtablehnung bzw. Ablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Nichtablehnungsbereich bzw. sonst -> Irrtumswahrscheinlichkeit als Fehler 1. Art $p(X<a) \leq \alpha$ (bezogen auf den Ablehnungsbereich), Fehler 2. Art $p(X \geq a)$ unter Trefferwahrscheinlichkeit $p^* < p$ (bezogen auf den Nichtablehnungsbereich).

Dem Nichtablehnungsbereich [a; n] entspricht der Ablehnungsbereich [0; a-1].

Einseitiger Signifikanztest (rechtsseitig):

H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese)
gegen H_1: $p>p_0$ (Gegenhypothese)

bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> Nichtablehnungsbereich [0; b] der Nullhypothese bei kleinstem b mit

$$p(X \leq b) > 1-\alpha$$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Nichtablehnung bzw. Ablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Nicht-ablehnungsbereich bzw. sonst -> Irrtumswahrscheinlichkeit als Fehler 1. Art $p(X>b) \leq \alpha$ (bezogen auf den Ablehnungsbereich), Fehler 2. Art $p(X \leq b)$ unter Trefferwahrscheinlichkeit $p^* > p$ (bezogen auf den Nichtablehnungsbereich).

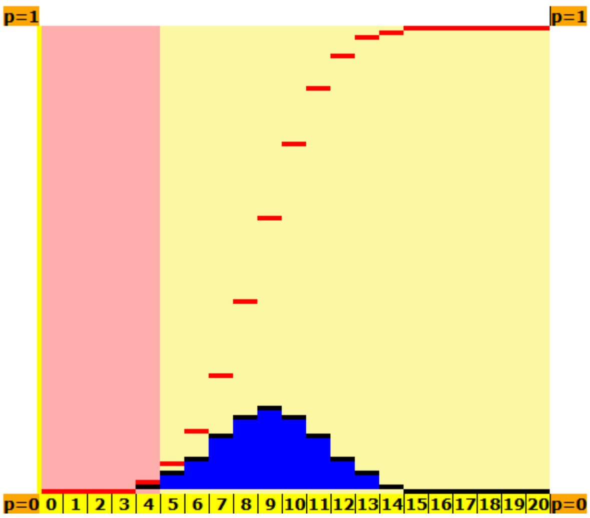
Dem Nichtablehnungsbereich [0; b] entspricht der Ablehnungsbereich [b+1; n].

Beispiele (einseitige Signifikanztests)

a) Einseitiger Signifikanztest (linksseitig) mit B(20,0.45)-verteilter Zufallsvariable: Nullhypothese H_0: p = 0.45; Gegenhypothese H_1: p < 0.45; Signifikanzniveau α = 0.05 = 5%

n = 20	B(20,0.45)	p = 0.45
k = g	p(X=k) =	p(X≤k) =
0	0.000006	0.000006
1	0.000105	0.000111
2	0.000816	0.000927
3	0.004006	0.004933
4	0.01393	0.018863
5	0.036471	0.055334
6	0.0746	0.129934
7	0.122072	0.252006
8	0.1623	0.414306
9	0.177055	0.591361
10	0.159349	0.750711
11	0.118524	0.869235
12	0.072731	0.941966
13	0.03662	0.978586
14	0.014981	0.993566
15	0.004903	0.998469
16	0.001254	0.999723
17	0.000241	0.999964
18	0.000033	0.999997
19	0.000003	1
20	0	1

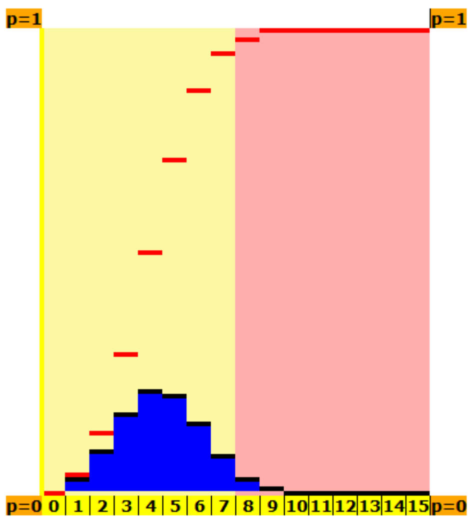
Ablehnungsbereich [0; 4], Nichtablehnungsbereich [5; 20] der Nullhypothese H_0: p = 0.45 zum Signifikanzniveau α = 0.05 = 5% bei 20-maliger Versuchswiederholung des Bernoulli-Experiments und Erwartungswert μ = 9; Ablehnungsbereich [0; 4] mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.018863 < 0.05.



b) Einseitiger Signifikanztest (rechtsseitig) mit B(15,0.3)-verteilter Zufallsvariable: Nullhypothese H_0: p = 0.3; Gegenhypothese H_1: p > 0.3; Signifikanzniveau α = 0.10 = 10%

n = 15	B(15,0.3)	p = 0.3
k = g-1	p(X=k) =	p(X≤k) =
0	0.004748	0.004748
1	0.03052	0.035268
2	0.09156	0.126828
3	0.17004	0.296868
4	0.218623	0.515491
5	0.20613	0.721621
6	0.147236	0.868857
7	0.08113	0.949987
8	0.03477	0.984757
9	0.01159	0.996347
10	0.00298	0.999328
11	0.000581	0.999908
12	0.000083	0.999991
13	0.000008	0.999999
14	0.000001	1
15	0	1

Nichtablehnungsbereich [0; 7], Ablehnungsbereich [8; 15] der Nullhypothese H_0: p = 0.3 zum Signifikanzniveau α = 0.10 = 10% bei 15-maliger Versuchswiederholung des Bernoulli-Experiments und Erwartungswert μ = 4.5; Ablehnungsbereich [8; 15] mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.015243 < 0.1.



Der Fehler 1. Art ist identisch mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 0.018863 = 1.8863 %. Der Fehler 2. Art ist die Wahrscheinlichkeit des Nichtablehnungsbereichs [5; 20] bei tatsächlichen, aber unbekannten Grundwahrscheinlichkeiten $p^* < p = 0.45$:

n = 20	p = 0.45
p* =	p(X≥5) =
0.1	0.011253
0.15	0.067308
0.2	0.195792
0.25	0.382827
0.3	0.583629
0.35	0.754604
0.4	0.874401
0.41	0.892067
0.42	0.90781
0.43	0.921742
0.44	0.933984

Der Fehler 1. Art ist identisch mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 0.015243 = 1.5243 %. Der Fehler 2. Art ist die Wahrscheinlichkeit des Nichtablehnungsbereichs [0; 7] bei tatsächlichen, aber unbekannten Grundwahrscheinlichkeiten $p^* > p = 0.3$:

n = 15	p = 0.3
p*=	p(X≤7) =
0.31	0.940084
0.32	0.928871
0.33	0.916281
0.34	0.90226
0.35	0.886769
0.4	0.786897
0.45	0.653504
0.5	0.5
0.55	0.346496
0.6	0.213103
0.7	0.050013
0.8	0.00424

Zweiseitige Signifikanztests

Bei einem zweiseitigen Signifikanztest gilt:

H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese)
gegen H_1: $p \neq p_0$ (Gegenhypothese)

bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> (zweigeteilter) Ablehnungsbereich $[0; g_1] \cup [g_2, n] = \{0, 1, \dots g_1\} \cup \{g_2, \dots n\}$ der Nullhypothese bei größtem g_1 und kleinstem g_2 mit:

$$p(X \leq g_1) \leq \alpha/2,\ p(X \geq g_2) \leq \alpha/2\ (*)$$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Ablehnung bzw. Nichtablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Ablehnungsbereich bzw. sonst (Entscheidungsregel) -> Irrtumswahrscheinlichkeit als Fehler 1. Art $p(X \leq g_1) + p(X \geq g_2) \leq \alpha$ (bezogen auf den Ablehnungsbereich), Fehler 2. Art $p(g_1 < X < g_2)$ unter Trefferwahrscheinlichkeit $p^* < p$, bezogen auf den Nichtablehnungsbereich $[g_1+1; g_2-1] = \{g_1+1, g_1+2, \dots, g_2-1\}$.

(Dabei gilt hinsichtlich der Beziehung (*) die nützliche Umformung:

$$p(X \geq g_2) \leq \alpha/2 \Leftrightarrow 1-p(X \leq g_2-1) \leq \alpha/2 \Leftrightarrow -p(X \leq g_2-1) \leq \alpha/2-1 \Leftrightarrow p(X \leq g_2-1) \geq 1-\alpha/2.)$$

oder:

H_0: $p=p_0$ (Nullhypothese)
gegen H_1: $p \neq p_0$ (Gegenhypothese)

bei Stichprobenumfang n und Signifikanzniveau (maximale Irrtumswahrscheinlichkeit) α -> Nichtablehnungsbereich [a; b] der Nullhypothese bei kleinstem a und b mit

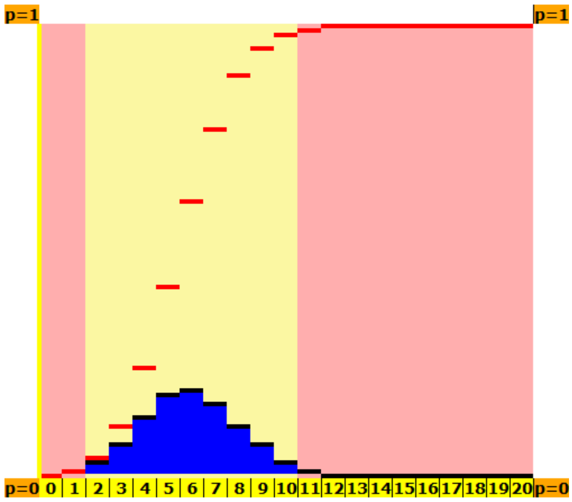
$$p(X \leq a) > \alpha/2,\ p(X \leq b) > 1 - \alpha/2$$

-> Durchführung der Stichprobe und Bestimmung der Trefferanzahl -> Annahme bzw. Ablehnung der Nullhypothese, wenn Trefferanzahl im Nichtablehnungsbereich bzw. sonst -> Irrtumswahrscheinlichkeit als Fehler 1. Art $p(X<a) + p(X>b) \leq \alpha$, bezogen auf den (zweigeteilten) Ablehnungsbereich $[0; a-1] \cup [b+1; n] = \{0, 1, \dots, a-1\} \cup \{b+1, \dots, n\}$, Fehler 2. Art $p(a \leq X \leq b)$ unter Trefferwahrscheinlichkeit $p^* < p$, bezogen auf den Nichtablehnungsbereich $[a; b] = \{a, a+1, ..., b\}$.

Beispiel (zweiseitiger Signifikanztest)

Zweiseitiger Signifikanztest mit B(20,0.3)-verteilter Zufallsvariable: Nullhypothese H_0: p = 0.3; Gegenhypothese H_1: p ≠ 0.3; Signifikanzniveau α = 0.05 = 5%

n = 20	B(20,0.3)	p = 0.3
k =	p(X=k) =	p(X≤k) =
0	0.000798	0.000798
1	0.006839	0.007637
2	0.027846	0.035483
3	0.071604	0.107087
4	0.130421	0.237508
5	0.178863	0.416371
6	0.191639	0.60801
7	0.164262	0.772272
8	0.114397	0.886669
9	0.06537	0.952038
10	0.030817	0.982855
11	0.012007	0.994862
12	0.003859	0.998721
13	0.001018	0.999739
14	0.000218	0.999957
15	0.000037	0.999994
16	0.000005	0.999999
17	0.000001	1
18	0	1
19	0	1
20	0	1



Ablehnungsbereich [0;1] ∪ [11; 20], Nichtablehnungsbereich [2; 10] der Nullhypothese H_0: p = 0.3 zum Signifikanzniveau α = 0.05 = 5% bei 20-maliger Versuchswiederholung des Bernoulli-Experiments und Erwartungswert μ = 6; Ablehnungsbereich [0;1] ∪ [11; 20] mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.007637 + 0.017145 = 0.024782 = 2.4782 % < 5 %.

Der Fehler 1. Art ist identisch mit der Irrtumswahrscheinlichkeit 0.024782 = 2.4782 %. Der Fehler 2. Art ist die Wahrscheinlichkeit des Nichtablehnungsbereichs [2; 10] bei tatsächlichen, aber unbekannten Grundwahrscheinlichkeiten p* ≠ p = 0.3:

n = 20	p = 0.3
p* =	p(2≤X≤10) =
0.1	0.608252
0.2	0.930261
0.25	0.971745
0.35	0.9447
0.4	0.871955
0.5	0.588078
0.6	0.244662
0.7	0.047962
0.8	0.002595

Aufgabe

Von einem hexaedrischen Spielwürfel mit den Augenzahlen 1, 2, … 6 wird vermutet, dass er hinsichtlich des Würfelns der Zahl 6 gezinkt ist. Bei einhundert Würfen trat dabei die Zahl Sechs 25-mal auf. Untersuche den Sachverhalt mit Hilfe eines geeigneten Signifikanztests.

Lösung: I. Grundlage des aufzustellenden Signifikanztests ist ein Bernoulli-Experiment, das n = 100 Mal durchgeführt wird. Die Grund- bzw. Trefferwahrscheinlichkeit für das Werfen einer Sechs hat bei einem fairen Würfel den theoretischen Wert p = 1/6. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der geworfenen Sechsen. Als Erwartungswert der Zufallsgröße ergibt sich: μ = np = 100·1/6 = 50/3 ≈ 16,67.

II. Das Testszenario ist Resultat folgender Überlegungen: Die Wahl von Nullhypothese H_0 und Gegenhypothese H_1 wird bestimmt von der Tatsache, dass die Behauptung, der Würfel wäre gezinkt, gestützt werden soll. Dies geschieht, wenn die Nullhypothese abgelehnt wird, und unter einem Fehler 1. Art, der z.B. auf das Signifikanzniveau α = 5% begrenzt wird. Null- und Gegenhypothese lauten somit:

H_0: p ≤ 1/6 (p = 1/6) gegen: H_1: p > 1/6.

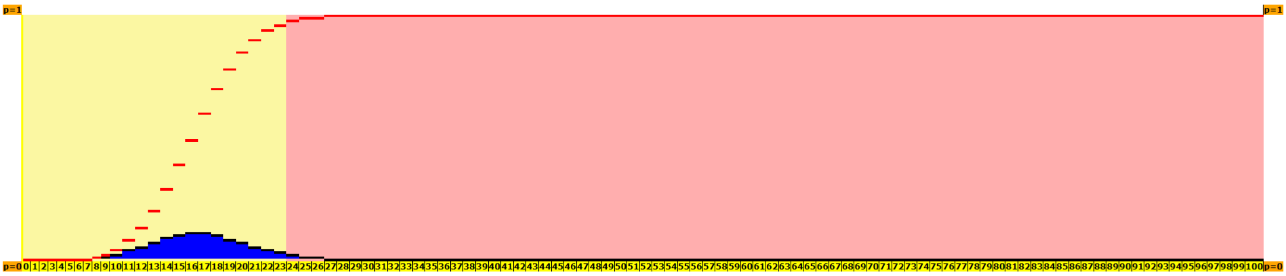
Es liegt damit ein einseitiger rechtsseitiger Signifikanztest vor. Statistisch soll mit dieser Art des Tests die Ablehnung der Nullhypothese bei Bevorzugung der Gegenhypothese erfolgen.

III. Aus dem definierten Testszenario mit Null- und Gegenhypothese folgt die Bestimmung des Ablehnungsbereichs des Signifikanztests. Und zwar gilt:

Einseitiger Signifikanztest (rechtsseitig) mit B(100,1/6)-verteilter Zufallsvariable: Nullhypothese H_0: p = 1/6; Gegenhypothese H_1: p > 1/6; Signifikanzniveau α = 0.05 = 5%

n = 100	B(100,1/6)	p = 1/6	n = 100	B(100,1/6)	p = 1/6	n = 100	B(100,1/6)	p = 1/6
k =	p(X=k) =	p(x≤k) =	k =	p(X=k) =	p(x≤k) =	k =	p(X=k) =	p(x≤k) =
0	0	0	34	0.000012	0.999993	68	0	1
1	0	0	35	0.000005	0.999998	69	0	1
2	0.000002	0.000003	36	0.000002	0.999999	70	0	1
3	0.000016	0.000018	37	0.000001	1	71	0	1
4	0.000076	0.000094	38	0	1	72	0	1
5	0.000291	0.000385	39	0	1	73	0	1
6	0.000921	0.001306	40	0	1	74	0	1
7	0.002474	0.00378	41	0	1	75	0	1
8	0.005752	0.009532	42	0	1	76	0	1
9	0.01176	0.021292	43	0	1	77	0	1
10	0.021403	0.042696	44	0	1	78	0	1
11	0.035024	0.077719	45	0	1	79	0	1
12	0.051952	0.129671	46	0	1	80	0	1
13	0.070334	0.200005	47	0	1	81	0	1
14	0.087416	0.287421	48	0	1	82	0	1
15	0.100237	0.387658	49	0	1	83	0	1
16	0.106501	0.494159	50	0	1	84	0	1
17	0.105248	0.599407	51	0	1	85	0	1
18	0.097062	0.69647	52	0	1	86	0	1
19	0.08378	0.78025	53	0	1	87	0	1
20	0.067862	0.848112	54	0	1	88	0	1
21	0.051704	0.899817	55	0	1	89	0	1
22	0.037133	0.93695	56	0	1	90	0	1
23	0.025186	0.962136	57	0	1	91	0	1
24	0.016161	0.978297	58	0	1	92	0	1
25	0.009826	0.988123	59	0	1	93	0	1
26	0.005669	0.993791	60	0	1	94	0	1
27	0.003107	0.996899	61	0	1	95	0	1
28	0.00162	0.998519	62	0	1	96	0	1
29	0.000805	0.999323	63	0	1	97	0	1
30	0.000381	0.999704	64	0	1	98	0	1
31	0.000172	0.999876	65	0	1	99	0	1
32	0.000074	0.99995	66	0	1	100	0	1
33	0.000031	0.999981	67	0	1			

Nichtablehnungsbereich [0; 23] der Nullhypothese H_0: p = 1/6 zum Signifikanzniveau α = 0.05 = 5% bei 100-maliger Versuchswiederholung des Bernoulli-Experiments und Erwartungswert μ = 16.67; Ablehnungsbereich [24; 100] mit Irrtumswahrscheinlichkeit 0.037864= 3.7864 %. Diagramm:



IV. Die Durchführung des Tests ergibt: Bei einhundert Würfen wurde die Zahl Sechs k = 25 Mal geworfen. Der Wert k befindet sich im Ablehnungsbereich [24; 100] des Tests, so dass die Nullhypothese abzulehnen ist. Dabei entsteht ein Fehler 1. Art als Irrtumswahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereichs [24; 100] von 0.037864= 3.7864 %; er tritt auf, wenn die Nullhypothese H_0 verworfen wird, obwohl sie wahr ist.

Der Fehler 2. Art entsteht, wenn die Nullhypothese H_0 falsch ist und nicht verworfen wird. Dieser Fehler ist die Wahrscheinlichkeit des Nichtablehnungsbereichs [0; 23] für prinzipiell unbekannte Grund- bzw. Trefferwahrscheinlichkeiten p* > p = 1/6. Es ergibt sich nebenstehende Tabelle. Die Summe von maximal auftretendem Fehler 2. Art und dem Fehler 1. Art hat übrigens den Wert 1.

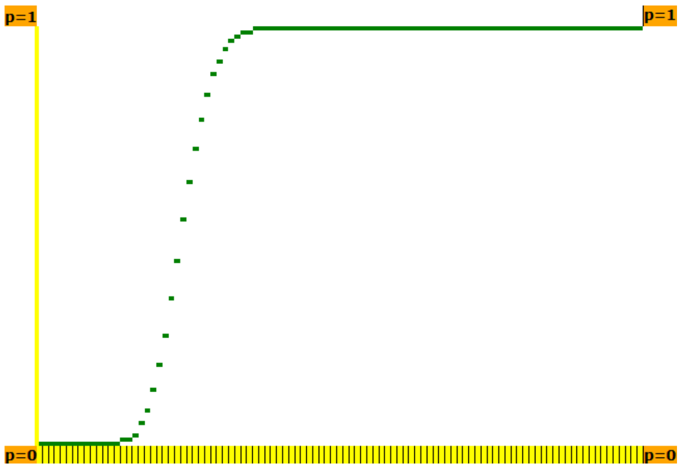
n = 100	p = 1/6
p*=	p(X≤23) =
(1/6	0.978297)
0.17	0.953756
0.18	0.92036
0.19	0.873009
0.2	0.810913

n = 100	p = 1/6
p*=	p(X≤23) =
0.25	0.371079
0.3	0.075531
0.35	0.00662
0.4	0.000252

V. Die Gütefunktion G(p) = $p_p(X \geq 24)$ ordnet dem Ablehnungsbereich [24; 100] den Fehler 1. Art unter der Grund- bzw. Trefferwahrscheinlichkeit p mit $0 \leq p \leq 1$ zu. Es gilt damit:

p =	G(p) =	1-G(p) =
0	0	1
0.05	0	1
0.1	0.00004	0.99996
0.11	0.000176	0.999824
0.12	0.00064	0.99936
0.13	0.001951	0.998049
0.14	0.005133	0.994867
0.15	0.011887	0.988113
0.16	0.024623	0.975377
0.17	0.046244	0.953756
0.18	0.07964	0.92036
0.19	0.126991	0.873009
0.2	0.189087	0.810913
0.21	0.264878	0.735122
0.22	0.35144	0.64856

p =	G(p) =	1-G(p) =
0.23	0.444378	0.555622
0.24	0.538551	0.461449
0.25	0.628921	0.371079
0.26	0.711287	0.288713
0.27	0.782774	0.217226
0.28	0.841988	0.158012
0.29	0.888888	0.111112
0.3	0.924469	0.075531
0.4	0.999748	0.000252
0.5	1	0
0.6	1	0
0.7	1	0
0.8	1	0
0.9	1	0
1	1	0



Die Gütefunktion G(p) steht für den Fehler 1. Art, 1 – g(p) für den Fehler 2. Art.

Literaturhinweise: Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien. Kursstufe. Leistungsstufe, bearb. v. D. Greulich u.a., Stuttgart 2022, S.332-357 (Signifikanztests); REINHARDT, F., dtv-Atlas zur Schulmathematik. Definitionen, Beweise, Sätze, München [3]2003, S.238-243 (Signifikanztests).