Blaise Pascal

Geboren wurde Blaise Pascal am 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand als Sohn des französischen adligen, an Mathematik interessierten Beamten Étienne Pascal und dessen Ehefrau Antoinette Begon. Die Mutter verstarb früh, der körperlich schwächliche Sohn wurde vom Vater erzogen, der im von Kardinal Richelieu regierten Königreich Frankreich des „Absolutismus“ im Finanzwesen hohe Positionen einnahm (Richter am Steuergerichtshof der Auvergne, oberster Steuereinnehmer für die Normandie). Blaise hatte noch eine ältere und eine jüngere Schwester. Die Familie hielt sich zeitweise in Rouen und Paris auf.
Blaise Pascal besuchte nie eine Schule oder Universität, sondern wurde von seinem Vater unterrichtet. Früh stellte sich heraus, dass der Junge hochbegabt war. Über seinen Vater erhielt er Kontakt zu Gelehrtengruppen in Paris, mit 16 Jahren verfasste er eine „Arbeit über Kegelschnitte“ (*Essay pour les coniques*, 1640), in der er das Pascalsche Theorem über ein Hexagramm, dessen Ecken auf einem Kegelschnitt liegen, vorstellte. Die Analyse von Kegelschnitten hat Pascal auch weiterhin (bis 1654) beschäftigt, doch ist über diesbezügliche Forschungsergebnisse nichts weiter bekannt. 1642/45 konstruierte Blaise Pascal für seinen Vater eine mechanische Rechenmaschine aus Zahnrädern; sie führte als „erster arbeitender Computer“ arithmetische Rechnungen aus (Addition, Subtraktion) und beeindruckte die Zeitgenossen, so dass die Rechenmaschine – als Patent Pascals – in französischen Manufakturen nachgebaut wurde (Anzahl: ca. 50 Stück). Nach physikalischen Forschungen (über den Luftdruck und das Vakuum, 1647; über Flüssigkeiten, 1651/63) kam Pascals mathematische Schrift über das Pascalsche Dreieck heraus (*Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même manière*, 1654), in der er die arithmetischen Eigenschaften des von ihm (wieder-) entdeckten Dreiecks vorstellte.
Nach seiner „zweiten Bekehrung“ zur orthodox-rigoros-christlichen Frömmigkeit der Jansenisten (1654) befasste sich Blaise Pascal kaum noch mit Mathematik und Naturwissenschaften (Forschungen über die Zykloide, 1658/1659; *Traité des sinus des quarts de cercle* [„Abhandlung über den Sinus des Viertelkreises“] 1659). Er wandte sich nun verstärkt dem christlichen Glauben zu und wirkte fortan als Literat und christlicher Philosoph (*Lettres provinciales*, 1655/56; *Écrits sur la grâce* [„Schriften über die Gnade“, unvollendet] 1657; Pariser Droschkenunternehmen 1662). Berühmt geworden sind die nach seinem Tod zusammengestellten und veröffentlichten *Pensées sur la religion et sur quelques autres sujets* („Gedanken über die Religion und über einige andere Themen“) als Apologie („Verteidigung“) des Christentums. Blaise Pascal starb am 19. August 1662 in Paris, nachdem er seinen Besitz für soziale Zwecke verkauft hatte (*Mémorial* des Blaise Pascal).

Pascalsches Dreieck

Das 1654 von Blaise Pascal veröffentlichte „arithmetische Dreieck“, das in der chinesischen (12. Jahrhundert), arabischen (12. Jahrhundert) und europäisch-italienischen (16. Jahrhundert) Mathematik seine Vorläufer hatte, besitzt das folgende Aussehen:

Dreiecks-zeile:	Pascalsches Dreieck:																														
0																1															
1															1		1														
2														1		2		1													
3													1		3		3		1												
4												1		4		6		4		1											
5											1		5		10		10		5		1										
6										1		6		15		20		15		6		1									
7									1		7		21		35		35		21		7		1								
8								1		8		28		56		70		56		28		8		1							
9							1		9		36		84		126		126		84		36		9		1						
10						1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1					
11					1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1				
12				1		12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1			
13			1		13		78		286		715		1287		1716		1716		1287		715		286		78		13		1		
14		1		14		91		364		1001		2002		3003		3432		3003		2002		1001		364		91		14		1	
15	1		15		105		455		1365		3003		5005		6435		6435		5005		3003		1365		455		105		15		1

Das Pascalsche Dreieck wird von zwei Reihen aus Einsen umsäumt, die Zahlen in den Zeilen innerhalb des Dreiecks entstehen jeweils durch Addition der zwei schräg darüber liegenden Zahlen. Im so gebildeten Pascalschen Dreieck lässt sich eine ganze Reihe von Zahlenfolgen ausmachen, die Zahlenfolge der natürlichen Zahlen **N** = {1, 2, 3, …} in der 1. Spalte des Dreiecks, die der Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, 15, … in der 2. Spalte, die der Tetraederzahlen 1, 4, 10, 20, 35, … in der 3. Spalte, die Folge der Fibonaccizahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … durch Addition der Zahlen in den Dreiecksdiagonalen.

Binomialkoeffizienten

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck können wird mit den sog. Binomialkoeffizienten identifizieren. Diese entstehen, wenn wir algebraische Ausdrücke von der Form $(a+b)^n$ (n als natürliche Zahl, a, b reell) betrachten. Im Fall n=2 ist dies die bekannte 1. binomische Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$

Berechnen wir für n=1, 2, 3, … durch Ausmultiplizieren die Terme $(a+b)^n$, so erhalten wir:

$$\text{n=1: } (a+b)^1 = a+b = \underline{1}a+\underline{1}b$$

$$\text{n=2: } (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = \underline{1}a^2+\underline{2}ab+\underline{1}b^2$$

$$\text{n=3: } (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = \underline{1}a^3+\underline{3}a^2b+\underline{3}ab^2+\underline{1}b^3$$

$$\text{n=4: } (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = \underline{1}a^4+\underline{4}a^3b+\underline{6}a^2b^2+\underline{4}ab^3+\underline{1}b^4$$

$$\text{n=5: } (a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 = \underline{1}a^5+\underline{5}a^4b+\underline{10}a^3b^2+\underline{10}a^2b^3+\underline{5}ab^4+\underline{1}b^5$$

…

und damit als in den Termen unterstrichene Zahlen die Zahlen des Pascalschen Dreiecks. Es gilt dann zum einen der <u>binomische Lehrsatz</u>:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n ,$$

zum anderen die Definition der <u>Binomialkoeffizienten</u>:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

mit n! = 1·2·…·n (n! als „n Fakultät“, $\binom{n}{k}$ als „n über k“) (n, k als natürliche Zahlen, 0≤k≤n). Für die Binomialkoeffizienten gelten die Rechenregeln:

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n,\ \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Die Gleichheit von Binomialkoeffizienten und Zahlen im Pascalschen Dreieck ist dann auf Grund von

$$\binom{0}{0}=1$$

$$\binom{1}{0}=1 \qquad \binom{1}{1}=1$$

$$\binom{2}{0}=1 \qquad \binom{2}{1}=2 \qquad \binom{2}{2}=1$$

$$\binom{3}{0}=1 \qquad \binom{3}{1}=3 \qquad \binom{3}{2}=3 \qquad \binom{3}{3}=1$$

$$\binom{4}{0}=1 \qquad \binom{4}{1}=4 \qquad \binom{4}{2}=6 \qquad \binom{4}{3}=4 \qquad \binom{4}{4}=1$$

$$\binom{5}{0}=1 \qquad \binom{5}{1}=5 \qquad \binom{5}{2}=10 \qquad \binom{5}{3}=10 \qquad \binom{5}{4}=4 \qquad \binom{5}{5}=1$$

$$\ldots$$

ablesbar im Pascalschen Dreieck, wenn wir die Zeilen und (schräg gestellten) Spalten des Dreiecks beachten:

	Pascalsches Dreieck, Binomialkoeffizienten:											
Dreieckszeile:	**Dreiecksspalte**:						0					
0						1		1				
1					1		1		2			
2				1		2		1		3		
3			1		3		3		1		4	
4		1		4		6		4		1		5
5	1		5		10		10		5		1	

Wahrscheinlichkeiten

Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten die Binomialkoeffizienten und damit die Zahlen im Pascalschen Dreieck beim sog.

Bernoulli-Experiment auf. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit (0≤p≤1), der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen“. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an:

			0.4 **T**	>	p(**TTTT**) = 0.0256	**1**
		0.4 **T**				
			0.6 **N**	>	p(**TTTN**) = 0.0384	**2**
	0.4 **T**					
			0.4 **T**	>	p(**TTNT**) = 0.0384	**3**
		0.6 **N**				
			0.6 **N**	>	p(**TTNN**) = 0.0576	**4**
0.4 **T**						
			0.4 **T**	>	p(**TNTT**) = 0.0384	**5**
		0.4 **T**				
			0.6 **N**	>	p(**TNTN**) = 0.0576	**6**
	0.6 **N**					
			0.4 **T**	>	p(**TNNT**) = 0.0576	**7**
		0.6 **N**				
			0.6 **N**	>	p(**TNNN**) = 0.0864	**8**
			0.4 **T**	>	p(**NTTT**) = 0.0384	**9**
		0.4 **T**				
			0.6 **N**	>	p(**NTTN**) = 0.0576	**10**
	0.4 **T**					
			0.4 **T**	>	p(**NTNT**) = 0.0576	**11**
		0.6 **N**				
			0.6 **N**	>	p(**NTNN**) = 0.0864	**12**
0.6 **N**						
			0.4 **T**	>	p(**NNTT**) = 0.0576	**13**
		0.4 **T**				
			0.6 **N**	>	p(**NNTN**) = 0.0864	**14**
	0.6 **N**					
			0.4 **T**	>	p(**NNNT**) = 0.0864	**15**
		0.6 **N**				
			0.6 **N**	>	p(**NNNN**) = 0.1296	**16**

Trefferanzahl k =	**Pfadwahrscheinlichkeit**	**Pfadanzahl**	**Gesamtwahrscheinlichkeit** p(X=k) = p(kxT) =
4	0.0256	1	0.0256
3	0.0384	4	0.1536
2	0.0576	6	0.3456
1	0.0864	4	0.3456
0	0.1296	1	0.1296
		Summe	1
		Erwartungswert	1.6

Wahrscheinlichkeitsbaum/Wahrscheinlichkeiten beim Bernoulli-Experiment

Es gelten auf Grund der Pfadregeln für Wahrscheinlichkeitsbäume (Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades, Addition der (multiplizierten) Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade) die Trefferwahrscheinlichkeiten der Bernoulli-Formel:

$$p(kxT) = p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

mit den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ als Anzahl der Pfade mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$. Die Terme p(X=k) (n, k als natürliche Zahlen, 0≤k≤n) definieren eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (Binomialverteilung) der Zufallsvariablen X mit Erwartungswert E(X) und Standardabweichung σ(X):

$$E(X) = \mu = np$$
$$\sigma(X) = \sigma = \sqrt{np(1-p)}\,.$$

Literaturhinweise: dtv-Atlas Schulmathematik, v. F. REINHARDT (= dtv 3099), München [3]2003, S.229, 262 (Binomialkoeffizienten); STILLWELL, J., Mathematics and its History (= Undergraduate Texts in Mathematics), N.Y. [2]2004, S.143ff, 192-196 (Pascal, Pascalsches Dreieck); Wikipedia. Die freie Enzyklopädie: https://de.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal (Pascal), https://de.wikipedia.org/wiki/Pascalsches_Dreieck (Pascalsches Dreieck); www.michael-buhlmann.de: http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/math_bernexp11.htm, http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/math_pascald01.htm, http://www.michael-buhlmann.de/Mathematik/math_pascald02.htm (Bernoulli-Experiment, Pascalsches Dreieck).

Michael Buhlmann, www.michael-buhlmann.de 03.2017